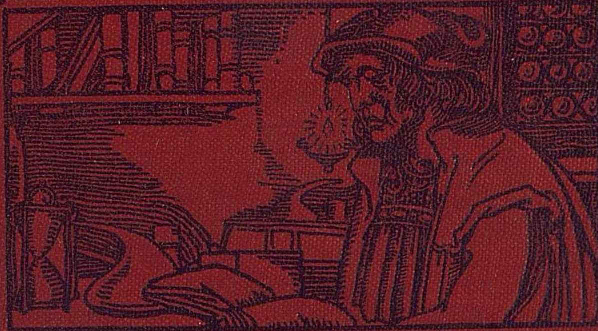
MANUALES CORONA

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA SUPERIOR

ESTADO ACTUAL, MÉTODOS Y PROBLEMAS

J. REY PASTOR



















INTRODUCCIÓN

A LA

MATEMÁTICA SUPERIOR

ESTADO ACTUAL, MÉTODOS Y PROBLEMAS

POR

J. REY PASTOR

CATEDRÁTICO EN LA UNIVERSIDAD DE MADRID



BIBLIOTECA CORONA
Villanueva, 23
1916



MADRID.—Imp. Clásica Española, Cardenal Cisneros, 10.—Teléf. 4430.



A MI QUERIDO MAESTRO

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO

ESFORZADO PALADÍN DE LA

MATEMÁTICA MODERNA EN ESPAÑA



A petición de algunos oyentes, damos a la publicidad el curso breve que en la primavera de 1915 explicamos en la cátedra del Ateneo.

Dedicadas estas conferencias a las personas familiarizadas con la parte elemental de la Matemática, era su objeto dar a este público, en parte profano, en parte profesional, una idea aproximada del estado actual de esta ciencia, de sus métodos y de sus problemas.

Porque estas lecciones pueden ser entendidas sin conocimientos superiores, y constituyen como un programa de la Matemática moderna, pueden servir de introducción a ella; por esto las hemos titulado así. Pero conviene precisar lo que entendemos por *elemental* y por *moderno*.

Bajo el nombre genérico de Matemáticas elementales, suele incluirse la Aritmética y el Álgebra,



hasta las ecuaciones de cuarto grado, la Geometría métrica, la Geometría proyectiva cuadrática y nociones de Cálculo diferencial e integral.

La Matemática, como todas las ciencias, sufre crisis periódicas que renuevan sus problemas y sus métodos. Pedir una definición de la disciplina que se llama hoy *Matemática moderna,* equivale a preguntar cuál es la última radical renovación que esta ciencia ha sufrido. En otro lugar nos hemos ocupado de su evolución en la Edad contemporánea [1], y a aquel estudio nos remitimos para justificar que por Matemática moderna entendamos la posterior a Riemann y Weierstrass. De ella nos ocupamos en estas páginas, agrupando sus variadas teorías en torno de tres ideas capitales: *conjuntos*, *funciones, grupos.*

Por el grandioso desarrollo de esta ciencia secular en los últimos tiempos, el cual obliga a sus cultivadores a especializarse en un área muy restringida, desde la cual no se perciben las líneas generales del edificio; y por la falta de obras que

(1) *Evolución de la Matemática en la Edad contemporánea.* Conferencias de la Sección de Ciencias exactas, físicas y naturales del Ateneo de Madrid. 1916.



desarrollen para la Matemática superior el mismo programa desenvuelto por Klein en su libro sobre la Matemática elemental, resulta demasiado audaz este propósito nuestro, para poder realizarlo sin contar con la benevolencia de nuestros lectores, como antes contamos con la de nuestros oyentes.





CONFERENCIA PRIMERA

Fundamentos de la Aritmética y del Análisis

Si alguien nos pidiera una definición de la Matemática futura, le diríamos que será la *Ciencia de los conjuntos;* y si a continuación nos preguntaran qué expresa esta palabra *conjunto*, nos veríamos muy apurados para dar una definición aceptable. Se ha dicho (1) que el significado de esta palabra no difiere del vulgar; pero esto no es completamente exacto. En el lenguaje vulgar nos referimos siempre a conjuntos finitos, a conjuntos cuyos elementos todos se pueden enumerar al cabo de un cierto tiempo; si bien hablamos a veces de conjuntos que no somos capaces de imaginar, ni mucho menos de enumerar, a los cuales atribuímos, por inducción, las mismas propiedades experimentadas en los conjuntos que imaginamos o percibimos bien.

(1) P. ej., v. Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions*. París, 1914.



Concepto de número natural De los conjuntos finitos nace, por abstracción, el concepto de *número,* fundamento de toda la Matemática. Mas, como a esta noción suele llegarse de modo nada riguroso, conviene decir algunas palabras sobre la génesis combinatoria de la Aritmética y sobre el método axiomático.

He aquí un ejemplo clásico, que nos muestra la necesidad del concepto de número, y el camino más natural para llegar a él. Una madre que carezca de esta noción, tiene varios hijos, que llamaremos *A*, *B*, *C, D;* hace entre ellos un reparto de manzanas, y sean *a, b, c, d* las que corresponden a *A, B*, *C*, *D,* respectivamente. Cada niño tiene, pues, *su* manzana; y si—como hemos supuesto—la madre carece del concepto de número, tendrá buen cuidado de dar a cada chico *su* manzana, para tener seguridad de que ninguno queda sin ella.

Mas supongamos que, tomando las mismas manzanas *a, b, c, d,* ensaya repartirlas de otro modo; y, por ejemplo, da *a* a *B,* la *d* a *A,* la *c* a *D*, y la *b* a *C.* Entonces observa un hecho sorprendente: cada chico tiene *una* manzana, aunque no sea la *suya,* y no sobra manzana ninguna. En cambio, si intenta repartir el conjunto *a, b, d* entre los niños *A, B, C, D,* indefectiblemente queda un chico sin manzana.

Dos conjuntos se dicen *coordinables* cuando entre sus elementos se puede establecer una correspondencia *biunívoca;* es decir, de tal modo, que a cada elemento de uno corresponde uno, y uno solo, en el otro. Y el hecho antes observado no es ca-



sual, sino que «dos conjuntos cualesquiera, coordinables de un cierto modo, lo son de cualquier otro modo que se ensaye la correspondencia».

De este hecho, fácil de demostrar [1], nace el concepto de número. Para poder estudiar las propiedades comunes a todos los conjuntos coordinables, y distinguirlos de los no coordinables, se introducen estos entes abstractos representativos que llamamos *números*. Todos los conjuntos coordinables tienen el mismo número; los no coordinables tienen números distintos. Resulta, pues, el número, de una doble abstracción: del *orden* de los elementos del conjunto, y de la *naturaleza* de éstos.

Este método, para llegar al concepto de número natural, y demostrar sus propiedades primeras, se apoya en las nociones de *conjunto* y de *tiempo;* y por si alguien se preguntara si será posible prescindir de ellas, o de otras análogas, y construir la Aritmética con la Lógica pura simplemente, nos adelantaremos diciéndole que la Lógica es una palanca poderosa, pero que necesita un punto de aplicación exterior a la palanca misma; ella, por sí sola, no puede dar sino tautologías.

Por otra parte, como ha hecho notar Hilbert [2], en la exposición usual de las leyes lógicas se utilizan, tácita o explícitamente, la noción de conjunto

(1) Véase, p. ej., CAPELLI: *Istituzioni di Analisi algebrica* 1909.—REY PASTOR: *Resumen de las lecciones de Análisis matemático explicadas en la Universidad Central* (primer curso) Madrid. 1915.

(2) *Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.* Cong. Heidelberg. 1904.



y hasta la de número; y una separación rigurosa de lo intuitivo y de lo lógico en esta primera noción de número natural exigiría un «progreso de la Lógica actual, paralelo al de la Matemática».

Método genético Diluciden los filósofos estas cuestiones; pero sea ello como quiera, una vez el matemático en posesión del número natural (1), con dos números enteros construye el número racional, con infinitos números racionales construye el irracional, con dos números reales cualesquiera compone el número complejo ordinario, y con todos ellos edifica la Aritmética primero, y el Análisis superior después, sin recurrir a la intuición. Por esto ha podido decir Poincaré, que hoy *el rigor absoluto está logrado*.

Esta construcción aritmética pura, en la que sólo se habla de *números* y no de *cantidades*, en la que se define el número racional como «par de números naturales en un cierto orden de sucesión», y el irracional como «cortadura en el campo de los números racionales», con total independencia de la noción de límite—la cual presupone la intuición de la cantidad—, es una conquista moderna, en gran parte debida a Dedekind, y punto de partida para la *aritmetización* de la Matemática, realizada por

(1) Para Kronecker el número natural debe considerarse como dado, sin necesidad de fundamentación. Para Helmoltz es un fruto de la experiencia. Para Hilbert, el mejor método para introducir el número es el axiomático.



Weierstrass. Constituiría ofensa a la ilustración de mis oyentes detenerme en la explicación de esta noción moderna del número inconmensurable o irracional; pues esto equivaldría a suponer que hay entre ellos quien sigue todavía encariñado con la ya derogada teoría de Euclides.

Método axiomático

Expuesto queda así, a grandes rasgos, el *método genético;* con él se llega a la noción de número real por sucesivas ampliaciones del concepto de número natural. Hilbert prefiere, sin embargo, desde el punto de vista lógico, el *método axiomático,* para llegar directamente a caracterizar el sistema de los números reales, pero sin dejar de reconocer el alto valor pedagógico y eurístico del método genético.

No podemos detenernos hoy a exponer en detalle el método axiomático. En él se llama *números reales* a un conjunto de *cosas* o *entes* cualesquiera, *a, b, c...*, que cumplen un conjunto de condiciones; y esta serie de postulados constituyen una definición indirecta de dichos números. Estos postulados han de ser compatibles e independientes entre sí; punto importante sobre el que insistiremos al tratar de los fundamentos de la Geometría.

Construcción de la Aritmética

En el método genético es preciso ir generalizando sucesivamente las operaciones elementales, para cada nuevo sistema de números; y



esto se hace disponiendo de la arbitrariedad de las nuevas definiciones, de tal modo, que en el nuevo sistema, los números satisfagan a las mismas leyes formales que en el sistema anterior menos amplio. Esta norma o *principio de permanencia de las leyes formales* (con frecuencia interpretado muy erróneamente en nuestro país) es la que da a la Aritmética uniformidad y sencillez.

No nos detendremos, por ser bien conocido, en explicar estas generalizaciones sucesivas; ni cómo se combinan luego las operaciones elementales, dando origen a muy diversos algoritmos (fracciones continuas, determinantes, etc.). Pero citemos siquiera la última de las operaciones elementales aritméticas, que sirve de enlace con el Análisis, y de la cual hemos de ocuparnos más detenidamente en otra conferencia; a saber: *el paso al límite*. Una combinación cualquiera de las operaciones elementales restantes, y de esta nueva, es lo que constituye un *algoritmo infinito:* las series, los productos infinitos, las fracciones continuas infinitas, los determinantes infinitos, etc.

Infinito potencial e infinito actual

Esta cita nos lleva como de la mano a establecer la frontera de separación entre la Aritmética y el Análisis, que pudiera establecerse así: la Aritmética estudia los conjuntos finitos y el *infinito potencial;* el Análisis, el *infinito actual*. Precisaremos esta distinción.

¿Qué queremos expresar cuando decimos que la



serie de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5....... es ilimitada, o es indefinida, o es infinita? Sencillamente este hecho: *después de cada número hay otro;* he aquí en esta frase el significado del infinito potencial. Toda la Aritmética de los algoritmos infinitos puede construirse sin usar esta palabra *infinito;* y es que, en realidad, sólo manejamos conjuntos finitos, conjuntos formados por n elementos, y luego tomamos n bastante grande para que se cumplan ciertas condiciones impuestas.

Se presenta, pues, esta cuestión: ¿Podemos operar con conjuntos infinitos como con los conjuntos finitos? Más aún: ¿Es legítimo hablar de conjuntos infinitos, siendo el hombre incapaz de concebir simultáneamente los elementos de un conjunto finito apenas el número de ellos es algo grande? Porque ya no se trata de considerar un número n de elementos que *va creciendo,* sino de concebir *simultáneamente todos* los elementos del conjunto; es la enorme diferencia existente entre la potencia y el acto, entre el devenir y el ser.

Conjuntos infinitos No podemos entrar en esta cuestión del conocimiento del infinito actual, la cual corresponde a la Filosofía y no a la Matemática; pero si no podemos concebirlo, sabemos manejarlo; y este estudio del infinito actual—obra admirable de Cantor—ha revolucionado esta ciencia; dentro de pocos años será el comienzo obligado de todo libro de matemáticas.

Supongamos establecida una ley, un convenio



cualquiera sujeto al principio del *tertio excluso* (es decir, no contradictorio); *diremos que forman un conjunto todos los objetos que cumplen esta ley*. Poco importa que no podamos concebir simultáneamente todos ellos; nos basta la seguridad de que, dado un objeto cualquiera, o cumple esta ley, o no la cumple; y en el primer caso queda incluído en el conjunto.

Obsérvese que nos guardamos de decir que *se pueda saber* si dicho objeto pertenece o no al conjunto. Pudiera, en efecto, suceder, que, con los recursos actuales de la Matemática, no fuese posible saber si dicho ente cumple o no la condición impuesta como definición del conjunto. Un ejemplo: el conjunto de los números irracionales está perfectamente definido, y, sin embargo, dado un número, no es fácil, ni a veces posible, decidir si es racional o irracional. Tenemos, por ejemplo, la famosa constante de Euler o Mascheroni, que se presenta en multitud de teorías diversas; se conoce su desarrollo en serie, en producto infinito, en forma de integral:

$$C = \int^{1} l(-lx)\, dx$$

$$C = 1 - l\,\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - l\,\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

$$C = l \prod_{1}^{\infty} \frac{ne^{\frac{1}{n}}}{n+1}$$

$$C = 0,5772\,15664 \ldots..$$



podemos calcular tantas cifras exactas como queramos, y, sin embargo, no sabemos todavía si este número tan perfectamente conocido es racional o es irracional.

Perfectamente definido está igualmente el conjunto de los números algébricos, y, sin embargo, no sabemos, ni parece hoy posible averiguar, si $2^{\sqrt{2}}$ o e^{π} son algébricos o trascendentes. Mas ¿para qué buscar ejemplos artificiosos, si tenemos el número π y el número e, los dos fundamentales de la Matemática, cuyo carácter trascendente no se ha logrado demostrar hasta fines del siglo XIX, a pesar del interés supremo que en ello había, por llevar aparejada la contestación definitiva a la famosa cuestión de la cuadratura del círculo?

La sucesión natural y el conjunto real.

Fijémonos en los conjuntos infinitos más sencillos que se presentan al estudiar el Análisis; por ejemplo, los términos de una serie. ¿Cuándo se dice que la serie *está dada?* Cuando se da una expresión general algorítmica φ (n), de la cual se deducen sucesivamente los términos, dando a n los valores 1, 2, 3... (así, por ejemplo, la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$), o bien cuando se da una ley cualquiera de formación. Así, la serie de Fibonacci se define de este modo: los primeros términos son *0* y *1*, y, a partir de ellos, cada término es la suma de los dos anteriores:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$



Estos ejemplos podrían inducirnos, como dice Borel, a dar la definición siguiente: «Diremos que un conjunto está dado, cuando por una ley cualquiera se pueden determinar sus elementos sucesivamente, sin dejar ninguno ni repetir ninguno.» Esto equivaldría a reducir el infinito actual al infinito potencial.

Aquellos de mis oyentes que no estén familiarizados con la Matemática moderna, aceptarán desde luego esta definición como satisfactoria. Nada más peligroso, sin embargo, en todas las teorías donde interviene el infinito, que dejarse llevar de la inducción, dejando pasar las palabras sin examen riguroso que precise y delimite su significado.

Dar los elementos *sucesivamente* quiere decir: dar uno, y luego otro, y después un tercero...; equivale, pues, a *enumerarlos,* y, por tanto, a *numerarlos;* es atribuir a cada elemento un número de la sucesión 1, 2, 3, 4 ..., de modo que, recíprocamente, a cada número natural corresponda un solo elemento. Dicho concisamente: *es establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y la serie de los números naturales.*

Y bien: ¿son todos los conjuntos susceptibles de esta enumeración, de esta numeración, de esta correspondencia? Es decir, ¿son todos los conjuntos *numerables?*

Fijémonos en el formado por *todos los números reales comprendidos entre 0 y 1.* Vamos a demostrar que este conjunto, perfectamente definido, no



es numerable; es decir: de cualquier modo que se forme una sucesión indefinida

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ \ldots$$

de números comprendidos entre *0* y *1*, hay otros números de este intervalo que no figuran en la sucesión.

Recordemos para esto una propiedad elemental de las fracciones continuas: «Todo número real admite un desarrollo único en fracción continua (finita o ilimitada); y, por consiguiente, si los desarrollos difieren en algún cociente incompleto, representan números distintos». Sentado esto, desarrollemos los números $n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots$

$$n_1=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{c_1+\cdots}}}\qquad n_2=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{c_2+\cdots}}}\qquad n_3=\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{b_3+\cfrac{1}{c_3+\cdots}}}\quad \cdots\cdots$$

Y ahora es muy fácil formar un número

$$n=\cfrac{1}{a+\cfrac{}{+\cfrac{1}{c+\cdots}}}$$

distinto de todos ellos, y como ellos comprendido entre *0* y *1*. En efecto: basta tomar $a \neq a_1$, $b \neq b_2$, $c \neq c_3$, ...; esta fracción, así formada, tiene, respecto de cada una de las anteriores, al menos un



cociente incompleto distinto, y, por tanto, es distinta de todas.

Tenemos, pues, dos conjuntos infinitos no coordinables entre sí: el formado por los números naturales 1, 2, 3, ..., y el conjunto de todos los números reales comprendidos entre *0* y *1*.

Noción de potencia. Para los conjuntos finitos hemos podido apreciar la importancia capital de la coordinabilidad. Desde el punto de vista matemático, dos conjuntos coordinables son equivalentes, y el *número* es el ente abstracto que nos servía para representar todos los conjuntos coordinables entre sí. Lo mismo acontece en la Matemática trasfinita. Cantor ha introducido una noción que, para los conjuntos infinitos, tiene la misma importancia capital que el número tiene para los finitos; este concepto es el de *potencia*.

Se dice que dos conjuntos tienen *igual potencia*, o son *equivalentes,* cuando son coordinables, y *distinta potencia* en caso contrario. Tenemos, pues, por lo pronto, dos potencias distintas: la de los conjuntos numerables, es decir, la del conjunto 1, 2, 3, 4, ..., y la del conjunto de los números reales comprendidos entre *0* y *1;* esta última se llama la *potencia del continuo.*

Otros conjuntos Cualquiera no versado en estas cuestiones trasfinitas, podrá creer que, halladas estas dos potencias distintas, es fácil



obtener otras potencias diversas. Por ejemplo: si del conjunto de los números naturales 1, 2, 3,... suprimimos varios, parece que el nuevo conjunto no será ya coordinable con el anterior, pues contiene *menos* elementos que él.

Y, sin embargo, nada más lejos de la verdad que esta aparente evidencia. No sólo prescindiendo de varios elementos; aun suprimiendo infinitos del conjunto 1, 2, 3,..., el formado por los infinitos restantes es equivalente al anterior, es decir, coordinable con él. Suprimamos, por ejemplo, los cuatro elementos primeros, o suprimamos todos los impares y, sin embargo, he aquí la correspondencia biunívoca:

1	2	3	4	5	6	.....
5	6	7	8	9	10	.....
2	4	6	8	10	12	.....

Al elemento n del primer conjunto corresponde el $n+4$ en el segundo, y el $2n$ en el tercero; cada elemento de uno tiene un homólogo, y sólo uno, en el otro, sin excepción ninguna.

Ejemplo instructivo es este, en cuanto nos enseña a proceder cautelosamente en estas cuestiones del infinito matemático. Las nociones de *más* y *menos*, de *suma* y *diferencia*, sólo están definidas para conjuntos finitos, y al aplicar inconscientemente proposiciones como «el todo es mayor que la parte» a los conjuntos infinitos, para los cuales carecen de sentido, obtenemos consecuencias falsas. Es preciso, pues, para ocuparse con fruto de



estas cuestiones trasfinitas, sin incurrir en paralogismos, borrar de nuestra mente todos sus prejuicios, y no usar ningún vocablo sin antes haberlo definido, aunque éste tuviera claro significado en el orden de la finitud.

Fracasados en la obtención de conjuntos infinitos de potencia inferior a la de la serie 1, 2, 3,... intentemos siquiera obtener otros de potencia superior a la del continuo. Parece a primera vista que tomando, no sólo los números del intervalo (0, 1), sino *todos* los números reales positivos, este conjunto más amplio no será coordinable con el anterior. Y, sin embargo, nada más fácil que establecer aritmética o geométricamente, dicha coordinación.

Geométricamente, los números del intervalo (0, 1) están representados por un segmento *A B;* y todos los números reales positivos, por una semirrecta $A\ C_{\infty}$. Coloquemos ambos con el origen común *A* formando un ángulo distinto de cero y de 180°. En la paralela a *A C* trazada por *B*, tomemos un centro *O,* y proyectando desde él los puntos del segmento *A B*, obtenemos los de la semirrecta *A C;* la correspondencia es punto a punto, es decir, biunívoca sin excepción.

Conjunto de los números racionales.

Todavía otra sorpresa. Formemos ahora el conjunto de todos los números racionales; de él forma parte la serie 1, 2, 3, 4..; y él, a su vez, está contenido en el conjunto más amplio



de todos los números reales. Para quienes tratan al infinito con excesiva familiaridad, será evidente que, conteniendo este conjunto de los números racionales *infinitamente menos números* que el de los reales, e *infinitamente más* que el de los naturales, no será posible su coordinación con uno ni con otro; más bien parece que tendrá una *potencia intermedia* entre ambos. Totalmente inexacta esta sospecha; coloquemos en un cuadro los números racionales

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & & 5/2 & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & & 5/3 & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & & 5/4 & \ldots \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots
\end{array}$$

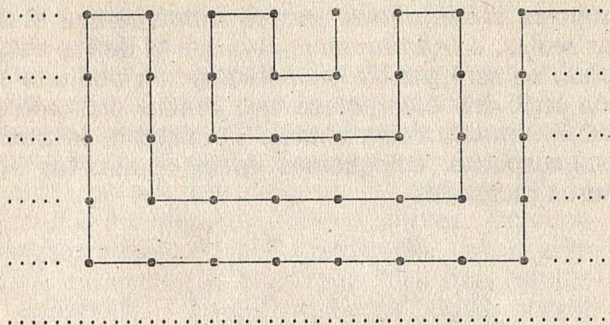
Después de tachar las fracciones reducibles, cada número racional queda escrito una vez y sólo una vez, y entonces podemos enumerarlos, comenzando por 1 y siguiendo el orden indicado por las flechas, obteniendo la sucesión ordenada siguiente:

$$1,\ 2,\ 1/2,\ 3,\ 1/3,\ 4,\ 3/2,\ 2/3,\ 1/4,\ 5,\ \ldots$$

A cada número racional corresponde un número de orden, y recíprocamente; es decir: *el conjunto de todos los números racionales es numerable.*

Y a la misma conclusión llegamos si incluímos también los números negativos. Todo se reduce a

efectuar la enumeración como indica el siguiente esquema:



Este hecho, que no podíamos sospechar, y todos nuestros fracasos anteriores en la busca de un conjunto que no sea coordinable con el natural ni con el continuo, hacen surgir en nosotros una duda: ¿existen conjuntos de números reales que no sean numerables ni tengan la potencia del continuo?

La duda es completamente fundada; más aún: es un problema, y problema capital; y, por añadidura, problema todavía no resuelto. Es una de las cuestiones fundamentales señaladas por Hilbert a los investigadores, en su famosa conferencia de París [1].

(1) *Sur les problemes futurs des mathématiques*. Congreso de París, 1900.



Potencia y número.

Hemos advertido que la *potencia* viene a ser para los conjuntos infinitos como el *número* para los finitos. Con las potencias pueden definirse las mismas operaciones fundamentales que con los números (adición y multiplicación), de este modo: «*Suma* de dos potencias $m+n$ es la potencia del conjunto obtenido agregando los objetos de un conjunto de potencia m y otro de potencia n. Producto $m\ n$ es la potencia del conjunto obtenido apareando cada objeto del primero con cada objeto del segundo.»

He aquí, pues, las mismas definiciones que sirvieron para la suma y producto de dos números. Pero este paralelismo entre *números* y *potencias* no es completo. La potencia toma del número solamente su carácter *cardinal*, mas no el *ordinal*. Precisaremos esta diferencia.

Los elementos de un conjunto finito pueden ordenarse mediante cualquier convenio. Si, por ejemplo, se trata de cuatro objetos, indicaremos esta ordenación así:

$$a \prec b \prec c \prec d$$

donde el signo $\prec$ tiene el significado: *anterior á*. Sea, análogamente, $l \prec k \prec p \prec m$ otro conjunto de igual número de elementos, también ordenados. Se puede, evidentemente, coordinarlo con el anterior de modo que se conserve el orden de ambos, así:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ l & k & p & m \end{matrix}$$

Es decir, el número natural, aunque ha sido defini-



do como número *cardinal* (con abstracción del orden), sirve también de número *ordinal;* y así sucede en la vida práctica, que el mismo signo usamos para representar un conjunto de *veinte* objetos, que para designar el *vigésimo* objeto entre varios ordenados.

Conjuntos ordenados

¿Qué sucede si los conjuntos son infinitos? En primer lugar, no siempre es posible la ordenación de sus elementos. Fijémonos solamente en los *conjuntos ordenados,* es decir, en aquellos para los cuales es posible fijar un convenio tal, que entre dos elementos cualesquiera establezca un orden de prelación; y para que ésta no sea contradictoria, cumpla la condición siguiente: «Si es $h \prec b$, y $b \prec q$, es $h \prec q$.»

Así, por ejemplo, el conjunto de los números racionales es ordenado, y el modo más sencillo de ordenarlos es ponerlos de menor a mayor. Pondremos, verbigracia, $\frac{2}{5} \prec \frac{3}{4}$ por ser $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$. Por otra parte, sabemos que este conjunto es numerable, es decir, se puede coordinar de muchos modos con el conjunto 1, 2, 3, 4,...... Y ahora nos preguntamos: ¿será posible hacer esta coordinación de modo que se conserve el orden de ambos conjuntos; es decir, de tal suerte que, en la sucesión *numerada* de fracciones, cada una sea menor que las siguientes?

Evidentemente, no; pues entre dos números naturales consecutivos, no hay otros números naturales; mientras que entre los dos racionales corres-



pondientes existen infinitos otros racionales, los cuales, por tanto, carecerían de homólogo en la serie natural. No basta, pues, que dos conjuntos estén ordenados y tengan la misma potencia, para que puedan *coordinarse ordenadamente;* es precisa alguna condición más.

Conjuntos bien ordenados.

Observemos que esta imposibilidad estriba en lo siguiente: en el conjunto de los números racionales, aunque ordenado, cada elemento no tiene otro sucesivo; se puede hablar de número *menor* que otro, pero no de números *consecutivos*. Pues bien: un conjunto se dice *bien ordenado* cuando a cada elemento sigue otro; y dos conjuntos bien ordenados, entre los cuales existe una correspondencia biunívoca, que conserva el orden, se llaman *semejantes*.

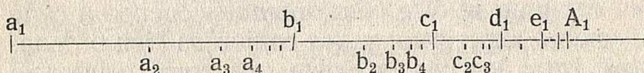
Pondremos un ejemplo sencillo; y en vez de operar sólo con los números, utilizaremos su representación geométrica para lograr claridad mayor. En una recta marquemos los puntos a_1, b_1, c_1, d_1, ... de abscisas 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, ...; es decir, bisecamos el segmento unidad $a_1\ A_1$ por el punto b_1; la segunda mitad la bisecamos por el punto c_1, etc. Apliquemos este mismo proceso al segmento $a_1\ b_1$, y obtenemos en él la sucesión indefinida de puntos $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ .....; hacemos lo mismo en el $b_1\ c_1$, y resulta la sucesión $b_1\ b_2\ b_3$ .....; en el segmento $c_1\ d_1$ nace la sucesión $c_1\ c_2\ c_3$ ....., etc., etc. He aquí, pues, un conjunto infinito bien ordenado,



compuesto de una infinidad numerable de conjuntos numerables.

Números trasfinitos Puesto que el concepto de número natural nos ha servido para representar todos los conjuntos finitos que son coordinables, y distinguirlos de los no coordinables, lógico parece generalizar este concepto de número, de modo que sirva para representar todos los conjuntos bien ordenados que son semejantes, y distinguirlos de los no semejantes.

Para mayor sencillez, nos fijaremos en el ejem-



plo anterior. Comencemos numerando sus elementos, para lo cual nos bastan, por lo pronto, los números naturales; los puntos a_1 a_2 a_3 ... ocupan los lugares 1.°, 2.°, 3.°... Mas ahora se nos presenta una dificultad inesperada: mientras no existe ningún número natural que sea *mayor* que cualquier otro, aquí tenemos muchos elementos—por ejemplo: el b_1—que son *posteriores* a todos los infinitos elementos a_1 a_2 a_3 a_4 ... a_n ... Aparece, pues, bien clara la necesidad de introducir nuevos entes abstractos, nuevos números, que nos sirvan para representar estos nuevos elementos.

Pero antes de considerar el b_1, aparece ya la dificultad. En efecto, el número natural n nos sirve para representar el conjunto de los n primeros ele-



mentos. Mas ¿con qué número podemos representar el conjunto de *todos* los puntos a_1 a_2 a_3 ... a_n ... ? Ya no se trata del infinito potencial, del conjunto finito *que va creciendo indefinidamente*, sino de la serie total que *es infinita;* es decir, se trata del infinito actual numerable; para representarlo introducimos el símbolo ω.

Salvada así la primera dificultad, los conjuntos

$$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ \ldots\ b_1$$
$$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ \ldots\ b_1\ b_2$$
$$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ \ldots\ b_1\ b_2\ b_3$$
. . . .

se representan por $\omega + 1$, por $\omega + 2$, ... respectivamente. Mas de nuevo surge la duda: ¿qué número asignaremos al conjunto de todos los puntos a_1 a_2 a_3 ... a_n ... más todos los b_1 b_2 b_3 ... b_n ... ? Porque el número $\omega + n$, por muy grande que tomemos n, designa el conjunto de todas las a con las n primeras b, mas no *todas las b*.

Operaciones con números trasfinitos. Pero antes de avanzar más, hagamos una digresión: ¿cómo podrán definirse con los números trasfinitos las mismas operaciones fundamentales de los números finitos? Basta un cambio de palabras y una pequeña restricción. Llamamos «*suma* $\mu + \nu$ de dos números trasfinitos μ y ν, al número que corresponde al conjunto obtenido agregando a continuación de los objetos de un conjunto M,



cuyo número sea μ, los de un conjunto N, cuyo número sea ν, conservando el orden prefijado para los elementos de cada conjunto». Aplíquese esta definición, y se verá que no sólo es $\omega + 1$ distinto de $1 + \omega$, sino que es $1 + \omega = \omega$, y en general es $\mu + \nu \neq \nu + \mu$. La adición de números trasfinitos *no es conmutativa*.

Compongamos ahora los conjuntos M y N; es decir, apareemos cada elemento m de M con cada elemento n de N, y establezcamos el siguiente orden de prelación: decimos que (m, n) es *anterior* a (m′, n′) si es $n \prec n'$; y en el caso $n = n'$, cuando sea $m \prec m'$. El número trasfinito del conjunto así compuesto, se llama *producto de* μ *por* ν; y en general es $\mu\nu$ distinto de $\nu\mu$. Aplique el lector la definición, y verá que, lejos de ser $2 . \omega$ igual a $\omega . 2$, es $2 . \omega = \omega$.

Sucesión de números trasfinitos - - - - - Ya es fácil asignar número a los conjuntos que van obteniéndose en nuestro ejemplo. Al formado por todas las a y las b, le corresponde $\omega + \omega = \omega . 2$; a los obtenidos agregando un objeto c_1, o bien c_1, c_2, etc., les corresponden los números

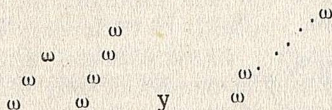
$$\omega . 2 + 1, \quad \omega . 2 + 2, \quad \omega . 2 + 3, \ldots;$$

al formado por todas las a, todas las b y todas las c, le asignamos el número $\omega . 3$, etc. Así llegamos a los números $\omega.4$, $\omega.5$, ..., $\omega.n$; y, finalmente, recordando la definición de producto antes dada,



el número que corresponde al conjunto total es $\omega.\omega$ o sea ω^2.

Pero el proceso aplicado al segmento $a_1 A_1$ para construir el anterior conjunto, lo podemos repetir para un segundo segmento $A_1 B_1$, y para otro $B_1 C_1$, ... y si elegimos los puntos B_1 C_1 D_1..... como antes, de modo que converjan hacia un punto X, podemos repetir el proceso en otro segmento XY, y luego en otros, y esta repetición no tiene fin. Y vamos obteniendo así números trasfinitos cada vez mayores; al ω^2 siguen los ω^2+1, ω^2+2, ... $\omega^2+\omega$,..., $\omega^2+2\omega$, $\omega^2+3\omega$,..., $\omega^2+\omega^2=\omega^2.2$; y luego vendrían $\omega^2.3$ y $\omega^2.4$,... y $\omega^2.\omega=\omega^3$; y repetido incesantemente el proceso, se llega a ω^4, ω^5,... ω^ω; y después vendría



Podemos aumentar cuanto queramos el número de exponentes, y, sin embargo, no basta; siempre existen elementos posteriores, es decir, números trasfinitos mayores. El símbolo ω es ya impotente para designarlos, y entonces se introduce un nuevo símbolo ε. Así como era por definición

$$\omega = \lim n, \qquad \text{es ahora} \qquad \varepsilon = \lim_{n=\omega} \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}} (n$$



y llega un momento en que estos nuevos símbolos, combinados con la ω, y potenciados con exponentes altísimos, no son suficientes; y se introducen nuevos y nuevos símbolos, nuevas y nuevas unidades trasfinitas de especie superior.

Cálculo de las *alef* de Cantor. Cantor ha designado las potencias de los conjuntos representados por los números trasfinitos, por las letras $\aleph_0\ \aleph_1\ \aleph_2$ .....; pero el cálculo de estos símbolos *alef* ha provocado algunas impugnaciones, en las que no podemos entrar. Citaremos solamente algunos resultados que han sido rigurosamente demostrados:

$$\text{Si es } a \leqq b \text{ es} \qquad \aleph_a + \aleph_b = \aleph_b \qquad \aleph_a \cdot \aleph_b = \aleph_b.$$

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \ldots\ldots = \text{potencia del continuo} = c$$

y como $\aleph_0$ es la potencia de los conjuntos numerables, o primera potencia, tenemos aquí ligadas algorítmicamente las dos potencias fundamentales de que antes nos hemos ocupado con todo detalle. En cambio es

$$c^2 = c^3 = \ldots\ldots = c^n = \ldots\ldots = c^{\aleph_0} = c$$

igualdad cuyo significado geométrico hemos de estudiar en la próxima conferencia.



El problema del continuo. Nos hemos fijado ha poco en el hecho de que los números racionales, en su orden natural de menor a mayor, no forman un conjunto *bien ordenado;* pero alterando convenientemente este orden hemos conseguido esto.

Tampoco está bien ordenado el conjunto de todos los números reales, dados en su orden creciente de magnitud, y Cantor se pregunta: *¿podrá establecerse entre los números reales un orden de prelación tal que resulte un conjunto bien ordenado?* Para los números racionales, esto era sumamente fácil, por ser numerable su conjunto; pero ahora se trata del continuo, es decir, de un conjunto no numerable, según antes hemos demostrado, y la dificultad sube de punto.

Problema gravísimo es éste de Cantor, cuya solución llevaría probablemente consigo la del otro problema que planteábamos al principio, a saber: el de la existencia de potencias intermedias entre el continuo y los conjuntos numerables.

Después de la conferencia dada en el Congreso de Heidelberg (1) por el ilustre matemático König, no hace mucho fallecido, llegó a creerse resuelto el problema de Cantor en sentido negativo. En efecto, utilizando el teorema de Bernstein, expresado por la igualdad

$$\aleph_x^{\aleph_v} = \aleph \;.\; 2^{\;v}$$

se deduce que el continuo no es un conjunto *bien*

(1) König, *Zum Kontinuum Problem.* Cong. Heidelberg, 1905, p. 144.



ordenado. Pero, desgraciadamente, la demostración del bello teorema de Bernstein tiene una laguna todavía no llenada, y la consecuencia de König carecía, por tanto, de base sólida. Sin embargo, una consecuencia muy interesante resulta de su trabajo: «si el continuo no es un conjunto bien ordenado, el teorema de Bernstein es cierto». Son, pues, equivalentes ambas cuestiones, y el problema del continuo queda así reducido a la demostración del teorema de Bernstein.

En cambio, si la sospecha de Cantor es cierta, el continuo, es decir, los números reales, se podrán disponer de modo que resulte un conjunto bien ordenado, y la potencia del continuo será inmediatamente superior a la de los conjuntos numerables. El desarrollo de la teoría está, pues, pendiente de esta pregunta: ¿es $\mathfrak{c} = \aleph_1$?

La sospecha de Cantor ha obtenido una demostración muy ingeniosa de Zermelo [1], la cual ha sufrido varias impugnaciones de Borel, Baire, Schönflies, Poincaré, Lebesgue, ... Ambos problemas siguen, pues, en pie, desafiando con la sencillez aparente de sus términos—la misma de los problemas de la esfinge—el ingenio de los matemáticos, a dura prueba sujeto en esta su atrevida lucha con el infinito[2].

(1) ZERMELO, *Math. Annalen,* t. 59, 1904, p. 514. Contestación a sus impugnadores, en el t. 65, 1907, p. 111.

(2) ZERMELO ha restringido la definición de conjunto imponiéndole cinco condiciones, que bastan para excluir las conocidas paradojas de RUSELL, BURALI... (Math. Ann., t. 59, 1904, y t. 65, 1908.)



CONFERENCIA SEGUNDA

Fundamentos de la Geometría

La misma tendencia crítica del siglo XIX, representada por Gauss, Abel y Cauchy, que sometió al Análisis matemático del siglo XVIII a una total revisión, de la cual resultaron desechados por inadmisibles multitud de conceptos, siendo definidos rigurosamente muchos otros, emprendió revisión análoga de la Geometría, en la cual se apreciaron graves imperfecciones del sistema de Euclides.

Cuando una institución venerable, que cuenta con varios siglos de existencia, comienza a ser discutida, suele sufrir el ataque de la crítica en un solo punto: en aquel donde la debilidad del sistema es más evidente. Pero una vez comenzado el asalto a la fortaleza, si éste tiene éxito, se extiende más y más, hasta que la fortaleza entera queda demolida. Este punto débil, por donde comenzó el ataque a la clásica Geometría de Euclides, es la Proposición V de los *Elementos,* que encierra la cuestión del paralelismo.



Legendre había pretendido, en vano, demostrar esta proposición fundamental como consecuencia de las restantes; al mismo tiempo que Lagrange perseguía, también en vano, la resolución de todas las ecuaciones por medio de radicales. Abel puso fin a estas tentativas con su famoso teorema, que inicia una nueva era para la teoría de ecuaciones. Gauss concibió la atrevida idea que Lobatschefski y Bolyai habían de desarrollar, simultáneamente, abriendo las nuevas vías por donde había de marchar en lo sucesivo la Ciencia geométrica (1).

Gauss, Lobatschefski, Bolyai.

La idea revolucionaria de Gauss es la siguiente: si el Postulado V de Euclides es una consecuencia de las demás proposiciones fundamentales, aceptando éstas y negando aquél, debe llegarse a una contradicción. Así procedieron Lobatschefski y Bolyai, independientemente; pero, lejos de llegar a una contradicción, negando la existencia de la paralela única, obtuvieron un sistema geométrico perfectamente constituído y consecuente consigo mismo. La independencia de la Proposición V respecto de las restantes, y, por tanto, la imposibilidad de demostrarla fundándose en aquéllas, quedó así evidenciada.

(1) Como precursores de Gauss (el cual no llegó a publicar sus ideas por «temor a los clamores de los beocios»), debemos citar a Sacheri (1733) y, sobre todo, Lambert (1786), además de Schweikart y Taurinus.



La Geometría así construída sin el postulado de Euclides, se consideró como la única perfecta, y por esto se llamó *absoluta;* juzgada como única racional posible, la titularon algunos *Pangeometría;* considerada como Ciencia trascendental, la llamaron otros *Metageometría;* queriendo expresar su carácter abstracto, recibió el dictado de Geometría *imaginaria*. Esta Geometría absoluta comprende, pues, dos ramas, según la solución que se dé a la cuestión del paralelismo: la Geometría euclidiana y la no euclidiana.

Riemann. Riemann inicia un nuevo período; mejor dicho, una revolución; y ésta la efectúa con una sola memoria, como todas las suyas, de muy pocas páginas (1).

Es conocido entre nosotros Riemann por haber fundado la Geometría esférica, completando así la Geometría no euclidiana con la tercera solución que cabía dar al problema del paralelismo. Pero éste, con ser tan grande, no es el mérito mayor de aquel profundo genio. Su contribución capital reside más bien en las dos ideas fundamentales que aporta a la Geometría: la idea de *multiplicidad* y la idea de *curvatura* de los espacios.

Para Riemann es el espacio geométrico un caso particular de las multiplicidades (Mannigfaltigkeiten) de elementos cualesquiera, y la Geometría, en

(1) Memoria póstuma, presentada como *Habilitationsschrift* en 1855, y no impresa hasta 1867.



su sentido más amplio, debe comprender el estudio de toda clase de multiplicidades, las cuales pueden tener cualquier número de dimensiones. A cada uno de estos espacios superiores o multiplicidades de elementos cualesquiera, corresponde una constante, un número, que Riemann llama *curvatura* del espacio, porque en el caso de dos dimensiones tiene este significado; el cual número, tomando valores distintos, caracteriza las diversas Geometrías posibles.

Espacio físico y espacio intuitivo.

De buen grado dedicaríamos más tiempo a exponer el desarrollo histórico de la Geometría no euclidiana durante el siglo XIX; pero siendo muy otro el objeto de estas conferencias, debemos pasar rápidamente a ocuparnos del estado actual de esta disciplina [1].

Mas no lo haremos sin insistir sobre la contribución capital que aquellos geómetras de la primera mitad del siglo XIX aportaron a la Ciencia; a saber: la idea de que el espacio físico pueda ser distinto de la representación intuitiva que de él nos forjamos. Precisaremos el significado de estos términos.

Cuando decimos que hemos dibujado en la pizarra una curva, bien sabemos que el trazo señalado

(1) Una reseña histórico-filosófica de las Geometrías no euclidianas puede verse en RUSSELL: *Essai sur les fondements de la Géométrie*. París. 1901. Para la bibliografía completa consúltese BONOLA-LIEBMANN: *Die Nichteuklidische Geometrie*. Leipzig. 1908.



por la tiza es, en realidad, una zona formada por partículas de yeso que posee una anchura y un espesor nada despreciables. Cuando decimos que dos curvas dibujadas son tangentes, bien sabemos que las dos zonas tienen un buen trozo común. Con instrumentos más delicados podríamos dibujar trazos mucho más finos, pero nunca desprovistos de anchura y espesor. Entonces, por abstracción de este espesor y de esta anchura, surge en nosotros la intuición de *curva geométrica* y la noción de *contacto;* análogamente nacen las ideas de punto geométrico, de plano, de superficie, etc. En una palabra: por abstracción del *espacio físico,* crea nuestra mente el *espacio intuitivo,* que es una representación ideal del primero.

Nuestra intuición espacial nace de la observación de una pequeña parte del espacio físico; y admitimos, por inducción, que todas las propiedades en él observadas subsisten más allá de los límites de nuestra percepción sensual. ¿No podrá suceder que esta inducción nos conduzca a resultados falsos?

Imaginemos un ser lineal que sólo pueda moverse sobre una circunferencia en una pequeña región de ella. ¿Qué noción del espacio tendría este ser inteligente? Para él no existirían puntos exteriores a esta línea; y *su infinito,* esto es, *lo no accesible* para él, tendría un significado muy distinto que para un ser plano o de tres dimensiones.

Hasta fines del siglo XIX, en que, después de los trabajos de Helmoltz y Beltrami, comienza a arraigar esta idea de la posibilidad de un desacuerdo entre la intuición y la realidad, no concedieron be-



ligerancia a la Geometría no euclidiana filósofos ni matemáticos, muchos de los cuales consideraban el nuevo sistema como *simple juego de palabras,* como *caricatura de la Geometría,* como *manifestación morbosa de la Matemática,* etc.

Crisis de la Geometría. En el último tercio del siglo XIX aparece una escuela alemana de analistas (Weierstrass, Cantor, Dedekind, du Bois-Reymond...), que dan sólida base al Análisis, terminando la obra que Cauchy iniciara. Como ya hemos hecho notar en la primera conferencia, el Análisis actual es una cadena de silogismos derivados de una noción en cierto modo intuitiva: el número entero.

Klein inicia más tarde en la Geometría una obra análoga. En su Memoria fundamental sobre la Geometría no euclidiana (1), descubre el error de los que juzgaban terminada la revisión de Euclides, cuando apenas había comenzado, pues sólo se habían fijado en una de sus proposiciones fundamentales. «Investigaciones análogas—proclama Klein—pueden y deben emprenderse respecto de las restantes hipótesis que sirven de base a la Geometría. La rama no euclidiana no es sino un primer paso dado en una dirección mucho más general.» Insistiendo en esta idea, señala a los geómetras multitud de proposiciones análogas, antes admitidas sin demos-

(1) *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* Math. Ann. Tomos 4, 6 y 7.



tración; y ahondando en los cimientos, descubre que el edificio de la Geometría proyectiva está construído en el aire, pues deja sin demostrar el teorema fundamental.

Como advertíamos al principio, cuando el ataque a una fortaleza tenida por inexpugnable alcanza éxito al primer ensayo, sigue el ariete en su obra destructora hasta reducirla a escombros. Esto parece acontecer después de cada una de las crisis periódicas que la Matemática sufre; pero, pasada la primera impresión, se observa que las columnas principales del edificio siguen en pie, como si éste hubiera resurgido de sus ruinas más perfecto y con nuevo vigor. Y es que en la evolución de la Ciencia no se destruye sistema ninguno que esté lógicamente construído, aunque lo haya sido con arreglo a normas ya abandonadas; cada renovación total de la Ciencia lo depura, eliminando impurezas y contradicciones; lo restaura con arreglo a las nuevas tendencias, y lo amplía, haciéndolo apto para resolver los nuevos problemas.

Esto ha acontecido con la Geometría. El llamamiento de Klein no cayó en el vacío, y multitud de geómetras se dedicaron con ardor a investigar los cimientos, para dar a esta ciencia la base sólida de que antes carecía, siendo Pasch el primero que logra una edificación rigurosa (1). Siguen después Veronese, Peano, Hilbert, Schur...

(1) *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Segunda edición. 1913. Traducción española de J. Alvarez Ude y J. Rey Pastor. Madrid. 1913.



La obra realizada abarca dos aspectos: objeto de la Geometría y forma lógica de su desarrollo; como si dijéramos: materiales de construcción y método de construcción.

Necesidad de la renovación.

Antes de exponer la transformación radical que esta ciencia ha sufrido, vamos a demostrar la *necesidad* de tal renovación. Esta necesidad se ha hecho patente durante todo un siglo de crítica, y sólo después de intensa labor negativa se ha efectuado la reedificación. Pero, teniendo estas conferencias el atrevido propósito de recorrer todas las teorías fundamentales de la Matemática en pocas horas, para convencer a los que me escuchan de la imprescindible necesidad de esta transformación de la Geometría, debemos suplir aquella lenta labor crítica con algún recurso de efecto rápido, casi fulminante, que lleve al ánimo de nuestros oyentes la convicción, o siquiera la impresión, de la insuficiencia del antiguo sistema.

No nos detendremos en señalar la total carencia de sentido que tienen las definiciones que solían estamparse en las primeras páginas de los viejos libros de Geometría. De aquellas perífrasis, en realidad simples juegos de palabras, que pretendían definir la recta como *distancia más corta entre dos puntos*, como *línea que tiene sus puntos en una sola dirección*, como línea que *coincide consigo misma al girar alrededor de dos de sus*



puntos, etc. Para que éstas y otras análogas definiciones tuvieran algún sentido, habría que definir antes lo que es *distancia,* lo que es *dirección*, lo que se entiende por *movimiento;* y para lograr esto, habríamos de utilizar precisamente la noción de línea recta que se trata de definir.

No creo que entre mis oyentes haya uno solo que conceda valor a estas definiciones; pero quizá habrá alguien que nos diga: «En efecto, estas nociones fundamentales no se pueden definir; pero tampoco es necesario hacerlo, puesto que son ideas innatas, sobre las cuales puede edificarse sólidamente, con método intuitivo.» Veamos el grado de confianza que debe merecernos un sistema así construído.

Si a un matemático anterior a Cantor le hubieran preguntado si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de un segmento y los de un cuadrado, hubiera contestado negativamente, sin titubear; y, dejándose llevar de la inducción peligrosa que nos hace inconscientemente aplicar a los conjuntos infinitos nociones sólo definidas y estudiadas en el orden de la finitud, hubiera añadido quizá: el cuadrado tiene *más* puntos que el segmento, porque haciendo corresponder punto a punto el segmento y la base del cuadrado, *sobran infinitos* puntos de éste; y de cualquier otro modo que se ensaye la coordinación, sucederá lo propio. ¿Por qué? Es *evidente.*



Algunas nociones previas. Para estudiar a fondo este problema, antepongamos unas sencillas nociones de Aritmética. Tomemos el segmento 0-1 en un eje de abcisas cualquiera. Cada punto interior del segmento está definido por un número (racional o irracional) menor que 1; al origen corresponde el número 0 y al extremo el 1. Construyamos asimismo un cuadrado sobre los dos segmentos unidad de dos ejes cartesianos x, y; cada punto está definido por sus coordenadas, siendo éstas menores que 1 para los puntos interiores, y sólo alcanzan el valor 1 en la periferia exterior a los ejes.

Es sabido, desde la Aritmética elemental, que todo número irracional tiene una expresión decimal única, que consta de infinitas cifras, y también tienen expresión decimal única las fracciones periódicas. El único caso de ambigüedad que presenta el sistema decimal es el de las fracciones de número finito de cifras (números *básicos)*, las cuales admiten dos representaciones con infinitas cifras [1]. Por ejemplo:

$$0{,}430000\ldots = 0{,}429999\ldots = 0{,}43.$$
$$0{,}201000\ldots = 0{,}200999\ldots = 0{,}201.$$

Pero desaparece la ambigüedad o indetermina-

(1) Como muchos libros españoles dan una idea falsa de esta representación, conviene recordar que la notación $0{,}a_1a_2a_3\ldots\ldots a_n\ldots\ldots$ designa siempre: $\lim_{n\to\infty} 0{,}a_1\,a_2\,a_3\ldots\ldots a_n$.



ción, si convenimos en tomar la primera representación, que es más sencilla, excepto en el caso

$$1{,}0000\ldots = 0{,}9999\ldots = 1,$$

en el cual tomaremos la segunda. De este modo, todo número $0 \lesseqgtr x \lesseqgtr 1$ tiene una expresión decimal *única,* con infinitas cifras, siendo nula la primera.

Correspondencia de Cantor. Recordadas estas nociones tan elementales, establezcamos entre los puntos del cuadrado y los del segmento la siguiente correspondencia: al punto de coordenadas

$$\begin{cases} x = 0{,}a\ b\ c\ d\ldots \\ y = 0{,}a'\ b'\ c'\ d'\ldots \end{cases}$$

le asignamos como homólogo el de abscisa

$$0{,}a\,a'\ \ b\,b'\ \ c\,c'\ \ d\,d'\ldots$$

De este modo, cada punto del cuadrado tiene su correspondiente en el segmento; por ejemplo, al punto

$$\left.\begin{array}{l} x = 0{,}3141592\ldots \\ y = 0{,}6070707\ldots \end{array}\right\}$$

le corresponde

$$0{,}36104710579027\ldots$$



Recíprocamente, todo punto del segmento tiene, *a lo sumo*, un correspondiente en el cuadrado, cuyas coordenadas se obtendrán desdoblando las cifras de aquél. Así, el punto 0,2104060504... tiene como homólogo en el cuadrado el

$$\begin{cases} x = 0{,}20000\ldots \\ y = 0{,}14654\ldots \end{cases}$$

Al punto 0,90909090... corresponde el vértice:

$$\begin{cases} x = 0{,}9999\ldots = 1 \\ y = 0{,}0000\ldots = 0. \text{ Etc.} \end{cases}$$

Hemos dicho «*a lo sumo*» porque todavía quedan puntos en el segmento, como son, por ejemplo:

0,60919191...; 0,5490909...; 0,70797979...,

que no tienen correspondiente en el cuadrado.

Es decir, si imaginamos suprimidos los pares de puntos correspondientes, desaparecidos todos los del cuadrado, incluso la periferia, quedarían todavía *infinitos puntos sobrantes en el segmento*, que no tienen correspondiente en el cuadrado.

Modificada ligeramente esta demostración (o bien utilizando fracciones continuas, en vez de desarrollos decimales [1]), resulta *biunívoca* la co-

(1) La demostración analítica puede verse en los tratados de Borel, la Vallée-Poussin, etc. Una demostración geométrica proyectiva hemos dado en nuestros *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*. Madrid. 1916. pág. 118.



rrespondencia; hecha la coordinación de otro modo, resultan, en cambio, infinitos puntos *sobrantes* en el cuadrado (1).

La trascendencia de este descubrimiento de Cantor ha sido muy considerable. Con él sufre rudo golpe la noción intuitiva de *dimensión*, una de las piedras fundamentales de la Matemática clásica. Ya no es posible hablar de conjuntos doblemente, triplemente infinitos, pues entre los puntos de un cuadrado o los de un cubo y los de un segmento se puede establecer una correspondencia biunívoca. Más todavía: imaginad un área cualquiera, finita o infinita; un volumen, por grande que sea; un segmento de longitud tan pequeña como queráis; entre el área, el volumen y el segmento puede establecerse la misma correspondencia.

Ejemplo de Borel. Otro ejemplo. Imaginad un segmento de longitud 1, y tomemos uno de sus extremos como origen de abscisas; fijémonos en los infinitos puntos del segmen-

(1) Como la correspondencia biunívoca establecida por Cantor entre el segmento y el cuadrado, a pesar de ser ya antigua (1879), causó cierta sorpresa en algunos oyentes, hemos modificado ligeramente su demostración de modo que todavía queden infinitos puntos *sobrantes en el segmento*, a fin de que su sorpresa sea mayor, y, convencidos de la carencia de sentido de las nociones de *más* y *menos* aplicadas a los conjuntos infinitos, emprenda alguien en España el estudio de estas teorías fundamentales de la Matemática actual.



to que tienen abscisa racional, o, como suele decirse brevemente, los *puntos racionales* del segmento. Bien sabéis todos cómo están dispuestos tales puntos; entre dos cualesquiera, por próximos que se tomen, hay infinitos puntos racionales. El más potente ultramicroscopio no podría *separarlos;* pues, por grande que sea su capacidad de aumento, entre dos puntos que la retina perciba como distintos, hay infinitos otros. Con la moderna terminología: los números racionales, o los puntos racionales, forman un *conjunto denso*.

Si no se presentara, al aplicar el teorema de Pitágoras, la necesidad de admitir la existencia de longitudes inconmensurables, es decir, no expresables por números racionales, concederíamos de buen grado que el segmento está formado *exclusivamente* por los puntos racionales.

Consideremos ahora cada punto racional $\frac{p}{q}$ encerrado en el segmento obtenido, llevando a derecha e izquierda de él la longitud $\frac{1}{q^3}$. El punto $\frac{p}{q}$ aparece así como centro del segmento que tiene por extremos:

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3} \quad \text{y} \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3},$$

el cual segmento contiene, naturalmente, no sólo el punto racional $\frac{p}{q}$ y otros infinitos puntos racio-



nales, sino también infinitos puntos de abscisa irracional. Por ejemplo: al punto $\frac{1}{2}$ le asignamos el segmento $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$, y lo propio hacemos con *todos* los puntos racionales. Tenemos así infinitos segmentos situados en el segmento total (0,1), muchos de los cuales se cubren parcial o totalmente.

Hasta aquí me habéis seguido, sin duda, perfectamente; todos os representáis, con perfecta claridad, esos infinitos segmentitos que cubren todos los puntos racionales, y montan unos sobre otros. Ahora os pregunto: ¿qué queda del segmento total (0,1) al suprimir *todos* los puntos racionales, con *todos* los segmentos que los cubren?

En vuestros rostros leo la contestación unánime: «No queda ningún punto.» «A lo sumo (diréis, acaso) quedarán los extremos 0 y 1.» Y si os preguntara el porqué de esta afirmación, contestaríais: *es evidente*.

Pues bien: a pesar de esta pretendida evidencia, después de suprimidos *todos* los segmentos, quedan todavía *infinitos* puntos. Señalad gráficamente el punto $\frac{\sqrt{2}}{2}$, por ejemplo, y ninguno de los segmentos suprimidos lo llevará consigo, pues queda fuera de todos ellos; y como éste quedan infinitos otros puntos. Pero si esto es ya bastante sorprendente, lo es mucho más el hecho de que el conjunto que forman estos infinitos puntos restantes tiene *la potencia del continuo,* es decir, la misma



potencia del segmento total, como si no hubiéramos suprimido punto alguno [1].

Otros ejemplos. He aquí un tercer ejemplo: Todos admitiréis como *evidente* que, si un arco de curva se mueve, sin variar de longitud, tendiendo a confundirse con otro fijo, esto es, de modo que cada punto del primero tenga como límite un punto, y sólo uno, del segundo, ambos arcos tienen igual longitud. Pues bien: admitida esta propiedad, mil veces utilizada en diversas formas en los libros de Geometría intuitiva, se demuestra sencillísimamente que un lado de un triángulo es igual a la suma de los otros dos.

Ignoro el efecto que el conocimiento de estos hechos sorprendentes, y de otros mil análogos que podríamos citar, producirá en el ánimo de los jóvenes que me escuchan; pero me atrevo a creer que, después de advertidos, no seguirán creyendo que la idea que tienen del *Continuo* es muy clara, ni que la intuición sea un apoyo seguro sobre el que puedan basarse las teorías matemáticas.

Vemos, por el contrario, en estos sencillos ejemplos, cuán poco debemos fiarnos de nuestro conocimiento intuitivo, nacido de una inducción peligrosa; y qué escasa confianza merece un edificio levantado sobre cimientos tan movedizos.

(1) La demostración completa de este hecho sorprendente, fundada en la teoría de las fracciones continuas, puede estudiarse en Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions,* 2.ª edición. París, 1914, pág. 39.



Peligros de la intuición.

La intuición geométrica nace de la observación de un caso aislado, o de un número limitado de casos; y las consecuencias generales en ellos inducidas, estarán en desacuerdo con la realidad, en infinidad de casos más complicados que no podíamos prever.

La intuición nos mantiene forzosamente sujetos a las tres dimensiones, y nos abandona completamente cuando queremos estudiar, con método geométrico, variedades cuyo grado de indeterminación es superior a tres.

Por dejarse llevar de la intuición, se ha creído durante mucho tiempo (y, lo que es peor, *se ha demostrado)* que toda función continua tiene derivada; que toda curva tiene tangentes, y es rectificable; que toda superficie tiene dos caras; que es indiferente el orden de sucesión de las derivaciones parciales de una función de varias variables.

Al método intuitivo son debidos casi todos los resultados falsos, indebidamente incorporados a la Matemática en diversas épocas; y por dejarse guiar por la intuición, un matemático tan notable como Staudt construyó en el aire la Geometría proyectiva sintética, obra de toda su vida, dejando sin demostrar el teorema fundamental.

La Geometría del espacio intuitivo, nacida de la observación del mundo exterior, es, en realidad, una ciencia natural; y, como ya hizo notar Grassmann en 1844, pertenece a las Matemáticas aplicadas. Para elevarla a la categoría de Ciencia pura, necesita, como la Aritmética, una base pura-



mente racional, ajena a toda observación de los sentidos, y esta base es el *espacio abstracto* (1). Debe, asimismo, prescindir en su construcción de todo recurso intuitivo; y el método que mejor llena esta aspiración, es el *método axiomático*. Espacio abstracto, y método axiomático; he aquí el tema que nos falta por desarrollar en esta conferencia.

Axiomática. Las características de este nuevo modo de edificación de la Geometría son las siguientes:

1.º Los conceptos fundamentales no se definen; se enuncian simplemente.

2.º Se establece una serie de propiedades fundamentales que han de poseer estos elementos. Estas proposiciones se llaman *axiomas* o *postulados*, indistintamente, y el conjunto de relaciones lógicas que enuncian constituye una definición indirecta de los conceptos primitivos.

3.º Geometría es el conjunto de relaciones y propiedades que se deducen lógicamente de estos axiomas.

Dejamos, pues, de lado la enojosa cuestión de la naturaleza de los puntos, de los segmentos intuitivos. Para nosotros designan estas palabras entes abstractos cualesquiera; si tales entes se to-

(1) Grassmann intentó ya la construcción de esta Teoría de la extensión abstracta (Ausdehnungslehre, 1844), cuyo objeto es una creación del espíritu, independiente de toda percepción sensual; pero su sistema contenía abundante material empírico, no alcanzando éxito.



man de la Matemática misma (por ejemplo, funciones, números, etc.), nos basta comprobar en la teoría de donde procedan, que cumplen las condiciones fundamentales exigidas en los axiomas; en caso contrario, la definición indirecta de los nuevos entes o elementos geométricos está dada por los mismos axiomas.

Axiomas gráficos. El primer sistema completo de axiomas, suficiente para construir lógicamente la Geometría proyectiva, fué dado por Pasch, y su primer grupo (axiomas de ordenación y enlace), ligeramente modificado por Schur (1), es el siguiente:

Ax. 1.° (Existencia del punto.) *Hay infinitos elementos llamados* PUNTOS.

Ax. 2.° (Existencia del segmento.) *Dos puntos cualesquiera determinan un conjunto de infinitos puntos, llamado* SEGMENTO, *tal que dos puntos cualesquiera del mismo determinan otro segmento, cuyos puntos pertenecen al primero.*

Ax. 3.° (División del segmento.) *Si* C *es un punto del segmento* $\overline{AB}$, *todo punto* D *del segmento pertenece al* $\overline{CA}$ *o al* $\overline{CB}$; *pero no a los dos simultáneamente.*

Con estos tres axiomas tan sólo, podemos ya

(1) Véase su tratado: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig. 1909. En nuestros *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*, hemos adoptado un sistema mixto de los de Pasch y Schur.



demostrar algunos teoremas. He aquí uno, a modo de ejemplo, para dar idea de la índole de estas demostraciones:

TEOREMA: *Si* C *está en* $\overline{AB}$, *no está* B *en* $\overline{AC}$.

Demostración: supongamos que B esté en $\overline{AC}$; por definición, C está en $\overline{AC}$; luego (Ax. 2.º) todo punto de $\overline{BC}$ está en $\overline{AC}$; pero (Ax. 3.º) ningún punto puede pertenecer simultáneamente a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$; luego la hipótesis hecha es falsa.

De este tipo son todas las demostraciones; y, no siendo sino combinaciones de silogismos aplicados a los axiomas fundamentales, podrían desarrollarse por medio de los símbolos de la lógica formal. El razonamiento se hace así mecánico.

Mas estos tres axiomas no bastan para que la Geometría sobre ellos construída tenga aplicaciones prácticas. Son precisas nuevas condiciones, es decir, nuevos axiomas.

Ax. 4.º (Prolongación del segmento.) *Si* C *está en* $\overline{AB}$, *(siendo distinto de* B) *y* B *está en* $\overline{CD}$, *está* C *en* $\overline{AD}$.

Ax. 5.º *Si* C *está en* $\overline{AB}$ *y en* $\overline{AD}$, *o está* B *en* $\overline{AD}$ *o* D *en* $\overline{AB}$.

Con estos cinco axiomas es ya posible definir la recta como resultado de prolongaciones sucesivas.

La disciplina así fundada sería la Geometría de un ser lineal, sujeto a moverse sobre un trozo finito de curva cualquiera. Sin embargo, si este ser inteligente prescindiese de la intuición, podría construir una Geometría de dos dimensiones, admitiendo los siguientes axiomas:



Ax. 6.º *Fuera de la recta hay puntos.*

Ax. 7.º *Si* A, B y C *no están en línea recta,* A′ *es un* PUNTO *del segmento* $\overline{BC}$ *y* D *un punto del* $\overline{AA'}$; *los segmentos* $\overline{CD}$ *y* $\overline{AA'}$ *tienen un punto común.*

Con estos dos axiomas se puede definir el conjunto de puntos llamado PLANO y demostrar sus principales propiedades. La Geometría así construída es la de cualquier superficie sin punto doble. El problema de hallar el punto común a dos rectas queda sin resolver; para lograrlo es preciso hacer hipótesis sobre el infinito del plano, es decir, establecer axiomas de paralelismo.

Esta sería la Geometría de un ser inteligente obligado a moverse en un trozo de una superficie cualquiera. Pero si este ser prescinde de la intuición, logrará construir una Geometría de tres dimensiones, admitiendo el siguiente axioma:

Ax. 8.º *Hay puntos exteriores a cada plano.*

Se construye con estos ocho axiomas la Geometría proyectiva del espacio de tres dimensiones. Mas, una vez abandonada desde un principio la intuición, nada impide continuar el camino emprendido, estableciendo el siguiente axioma:

Ax. 9.º *Hay un punto exterior al espacio* E_3.

Admitido este axioma, proyectando los puntos del espacio E_3 desde dicho punto exterior, construímos un conjunto de puntos que contiene los de E_3 más infinitos otros, y este conjunto se llama *espacio de cuatro dimensiones.*



Así siguiendo, se construyen los espacios de cualquier número de dimensiones. Pero este amplísimo grado de generalidad no es suficiente para abordar geométricamente multitud de problemas, y ha sido preciso concebir el *espacio de infinitas dimensiones*, como límite de E_n al crecer n indefinidamente. Otro día insistiremos sobre este punto.

Dimensiones del espacio físico.

De intento hemos pasado por alto la cuestión del número de dimensiones del espacio físico, problema extraño a la Matemática. Omitimos, en consecuencia, las diversas razones de índole filosófica, matemática, química, etc., que se han aducido para probar la posibilidad de un espacio cuadridimensional; el argumento de los poliedros simétricos, el del átomo plurivalente, etc. Pero citaremos siquiera las curiosas teorías del astrónomo Zöllner, profesor en la Universidad de Leipzig hacia el año 70.

Dió el famoso Slate unas sesiones de espiritismo, en las cuales, una vez puesto en comunicación con los espíritus, desataba lazos inextricables, hacía desaparecer objetos diversos sin que los asistentes lograran dar con ellos, y luego los hacía reaparecer, etc. No sólo creyó ciegamente Zöllner en la verdad de tales experimentos, sino que ideó una teoría para explicarlos.

Recordemos de nuevo los animales planos que viven en una superficie, la cual constituye para ellos todo el espacio físico. Imaginémonos trasla-



dados a ese mundo plano, análogo al de la conocida novela inglesa *Flatland*. Si retiramos un objeto de ese mundo, deja de ser visible para sus habitantes; y para justificar esta desaparición, y su reaparición después, tendrían que idear estos pobres bichos alguna explicación sobrenatural. Pues bien, dice Zöllner: ¿No estaremos nosotros en caso análogo? Nuestros sentidos no perciben más allá de este espacio de tres dimensiones; pero un *medium* que esté en relación con seres exteriores a nuestro espacio, y que goce de una visión más perfecta, capaz de percibir la cuarta dimensión, podrá alejar objetos de nuestro espacio visible y hacerlos reaparecer; efectuar operaciones para nosotros imposibles, como son: lograr la coincidencia de un tetraedro con su simétrico, soltar lazos inextricables, etc., que en el espacio de cuatro dimensiones no ofrecen dificultad.

Diversos grupos de axiomas.

Continuemos, después de esta digresión, la enumeración de los axiomas. Los que antes hemos establecido constituyen un primer grupo, llamado de *ordenación* y *enlace*. Pero éste no basta para construir una Geometría de interés práctico, y es preciso completarlo con otros grupos de axiomas:

II. Axiomas de congruencia.
III. Axiomas de paralelismo.
IV. Axiomas de continuidad.

La Geometría métrica o elemental exige todos estos grupos. La Geometría proyectiva sólo nece-



sita los grupos I y IV, y, por tanto, debe considerarse como más perfecta. Las Métricas no euclidianas prescinden del grupo III. Análogamente resultan las Geometrías *no arguesiana, no pascaliana* o *no papussiana* y *no arquimediana,* en las cuales no se verifican necesariamente las relaciones que expresan el teorema de Desargues, el de Pascal, o el axioma de la continuidad.

Huelga insistir más sobre la fundación axiomática de la Geometría, habiendo pasado ya a los libros elementales extranjeros, incluso algunos de enseñanza secundaria(1). Sólo repetiremos algo ya dicho en la conferencia anterior, adelantándonos a la objeción de los que juzguen imperfecta y no terminada la Geometría racional por el gran número de axiomas que exige; número bien reducido si se compara con la multitud de proposiciones admitidas sin demostración a cada paso en la antigua Geometría.

La Lógica por sí sola no puede construir un sistema científico, sino que exige un material adecuado, al cual pueda aplicarse. Los edificios no se construyen con arquitectos, planos y grúas solamente; se necesitan ladrillos y maderas. Nuestros materiales de construcción los hemos reunido antes de comenzar la edificación, y están contenidos en el anterior cuadro de axiomas. Con ellos construímos la Geometría como ciencia racional, con método deductivo puro.

(1) Por ejemplo, los de Veronese, Enriques, etc., de texto en los liceos italianos.



Compatibilidad de los axiomas.

Hemos dicho antes que los axiomas son proposiciones lógicas arbitrarias, mas no sin ciertas restricciones. Un sistema perfecto de axiomas debe cumplir las siguientes condiciones:

1.ª Deben ser *compatibles;* es decir, de ellos no ha de resultar nunca una contradicción.

2.ª Deben ser *independientes;* es decir, ningún axioma, ni una parte del mismo, deben ser consecuencia lógica de los demás.

Para demostrar la compatibilidad de los axiomas, aplica Hilbert el siguiente método [1]: Se construye una Geometría artificial, cuyos elementos sean números, funciones,... de tal modo, que a las relaciones geométricas definidas por los axiomas correspondan relaciones convencionales entre estos números. Si en los axiomas dados hubiese alguna contradicción, ésta aparecería en la Aritmética del sistema de números así construída.

Aclaremos esto con un ejemplo. Vamos a demostrar que entre los axiomas lineales 1.º a 5.º no hay contradicción ninguna. Consideremos como puntos los números racionales; llamaremos *segmento* definido por dos números racionales, al conjunto de todos los números racionales comprendidos entre ambos. Con esta definición es fácil ver que el sistema de los números racionales satisface a los cinco axiomas. En efecto: si c y d pertenecen al segmento ab, es decir, si es

(1) *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig. Cuarta edición. 1913.



$$a \gtreqless c \gtreqless b \quad \text{y} \quad a \gtreqless d \gtreqless b,$$

todo número comprendido entre c y d está comprendido entre a y b (axioma 2.º). Si c pertenece al segmento ab, es decir si es $a \gtreqless c \gtreqless b$, todo número comprendido entre a y b es menor, igual o mayor que c, es decir: $a \gtreqless d \gtreqless c$, o bien: $c \gtreqless d \gtreqless b$ (axioma 3.º). Análogamente resultan comprobados los axiomas 4.º y 5.º.

Vemos, pues, que la Geometría de este sistema de números no es sino la Aritmética de los números racionales; y si hubiera contradicción entre aquellos axiomas, ésta aparecería en la Aritmética, lo cual no acontece.

Independencia de los axiomas.

Ya hemos definido el significado de esta palabra. Se dice que un axioma es independiente de otros, cuando no es una consecuencia lógica de ellos. Para demostrar esta independencia, basta construir una Geometría artificial, admitiendo aquéllos y negando éste. Si se prueba la compatibilidad de esta Geometría, queda demostrada la independencia del axioma en cuestión. Así demuestra Hilbert que el axioma de paralelismo es independiente de los restantes, y también lo son los de congruencia, y lo mismo los de continuidad. De este modo queda demostrada aritméticamente la posibilidad lógica de las Geometrías no euclidianas, no arquimedianas, no pascalianas, etc.

Este método de Hilbert constituye un gran pro-



greso de la Axiomática, pero no resuelve completamente el problema; porque, en realidad, no hemos hecho más que desplazar la dificultad. En efecto, la no contradicción de los axiomas geométricos se reduce a la compatibilidad de los axiomas aritméticos; pero ¿y la de éstos? Bien sabemos que en la Aritmética no se ha presentado contradicción ninguna en el camino hasta ahora recorrido; mas ¿quién puede afirmar que lo mismo sucederá avanzando más y más?

El problema tiene trascendental importancia matemática y filosófica. Hilbert ha expresado repetidamente su convicción de que se podrá hallar una demostración directa de la compatibilidad de los axiomas aritméticos, aplicando los métodos de razonamiento usuales en la teoría de los números irracionales, convenientemente modificados[1]. Hasta hoy esta demostración no se ha logrado.

Análisis y Geometría.

Expuesta a grandes rasgos la fundación axiomática de la Geometría, veo asomar a vuestros labios una objeción. Bien—me diréis—, la Geometría ha logrado constituirse como ciencia rigurosa; pero lo que ganamos en rigor, lo perdemos en objetividad.

Así es, en efecto. La Geometría nació de la medida del suelo, y por abstracciones sucesivas se

(1) *Mathematische Probleme.* Góttinger Nachrichten.—Cong. de París. 1900.



ha ido elevando hasta perder todo contacto con ese mismo suelo. En su grado máximo de abstracción, constituye un cuerpo cerrado de doctrina, totalmente independiente del mundo exterior, pero que sabe recobrar el contacto con ese mundo exterior cuando se le exige una aplicación a la vida real. Su material de construcción está formado por entes abstractos cualesquiera, sólo definidos de modo indirecto por los axiomas. Dadle como material esa cosa vaga e indeterminada que se llama espacio intuitivo, y os devolverá perfeccionada la misma Geometría clásica.

Hemos visto que el material de la Geometría abstracta puede estar constituído por números; es decir, que gran parte del Análisis aparece incluído en la Geometría, y, recíprocamente, toda la Geometría está incluída en el Análisis. En realidad, ha desaparecido ya toda diferencia esencial entre ambas disciplinas; objeto único de la primera y fin primordial del segundo es el estudio del *Continuo* (1). Por eso os dije el primer día que la Matemática es ya, y será cada vez más, la Ciencia de los conjuntos.

¿En qué se diferencian, pues, Análisis y Geo-

(1) Siendo el objeto de la Geometría el estudio del *Continuo*, deberían comenzar los libros de esta disciplina estableciendo rigurosamente este concepto básico, adoptando los valiosos resultados ya conseguidos por la Teoría de los conjuntos. Sin embargo, los tratados didácticos no se han dejado apenas influir por la moderna tendencia. Un ensayo en este sentido hemos hecho en nuestra obra antes citada de Geometría proyectiva.



metría? En el método de investigación; a veces solamente en el lenguaje. La Geometría usa todavía el mismo lenguaje que cuando era la ciencia del espacio intuitivo: un lenguaje que evoca en nosotros representaciones del espacio físico; pero los entes a que nos referimos tienen el mismo grado de abstracción que los números del Análisis.

En Análisis hablamos de sistemas de números, de ecuaciones, y, en Geometría, de espacios o figuras. En Análisis estudiamos funciones, y en Geometría curvas, superficies, etc.; pero el concepto es, en esencia, el mismo. La teoría de las redes de puntos equidistantes viene a coincidir con la de las formas cuadráticas numéricas; las ecuaciones diferenciales equivalen a las variedades de escamas; las transformaciones lineales en las funciones de variable compleja, representan movimientos no euclidianos; etc. (1)

Lógicos e intuitivos. Por esto, la clasificación de los matemáticos en analistas y geómetras no tiene ya razón de ser. Los geómetras que se precian de su independencia total del Análisis, utilizan éste sin darse cuenta, y, sin quererlo, hacen también Análisis. Como dice el primero de los geómetras italianos actuales, la mayor parte de la Geometría hay que buscarla en las obras de los analistas.

(1) SEGRE, *La Geometria d'oggidi e i suoi legami coll' Analisi*. Cong. de Heidelberg. 1904, pág. 109.



Subsiste, sí, una diferencia entre los matemáticos, que se refiere a su temperamento científico más bien que al objeto que cultivan. Los unos se sirven de la intuición como guía en sus descubrimientos, sin perjuicio de demostrarlos o desecharlos luego, mediante un análisis riguroso; son éstos los matemáticos *intuitivos* o geómetras, y de ellos citaremos los más geniales de estos últimos tiempos: Klein y Poincaré. Los otros *no ven en el espacio;* pero saben avanzar con paso seguro a través de los razonamientos abstractos más complicados; son éstos los matemáticos *lógicos,* sobre todos los cuales descuella en la actualidad Hilbert.

Papel de la intuición.

Esto nos lleva de modo natural a plantear la cuestión siguiente: ¿Debe desterrarse de la Matemática la intuición? No; en modo alguno. Debe subsistir, y seguirá desempeñando papel importantísimo. Ella nos hace adivinar o presentir multitud de propiedades, que de otro modo no llegaríamos a descubrir. La intuición nos sirve de guía en las demostraciones, indicándonos el camino que debemos seguir para alcanzar perfecto rigor. La intuición geométrica nos facilita extraordinariamente la comprensión de relaciones analíticas complicadas, que de otro modo no podríamos retener.

¿Quién, por muy poco desarrollado que tenga el sentido geométrico, no se sirve de la representación por puntos de la recta para estudiar las relaciones de magnitud entre números reales? Hasta



los matemáticos que mayor don de abstracción poseen, como el mismo Hilbert, confiesan que, sin la preciosa guía de la intuición geométrica, sin las figuras, no lograrían demostrar los teoremas algo complicados sobre continuidad de funciones, sobre puntos de condensación, etc. Con palabras del mismo Hilbert «los signos y fórmulas de la Aritmética son figuras escritas, y las figuras geométricas son fórmulas dibujadas; ningún matemático podría prescindir de estas fórmulas dibujadas, como no podría realizar sus cálculos sin paréntesis ni signos operativos».

Pero entiéndase bien (y perdónesenos la insistencia): en la Matemática moderna queda relegada la intuición al papel de guía, que no sirve para demostrar nada, aunque ayuda a concebir la demostración rigurosa; como el faro indica al buque la ruta que debe seguir para llegar al puerto, pero el buque ha de salvar la distancia con sus propios recursos.

No entraremos en la cuestión pedagógica relativa al papel que la intuición geométrica debe tener en la enseñanza. Si la exposición de la Matemática en las escuelas secundarias ha de ser lógica o intuitiva, es cuestión que aquí no hemos de discutir, y respecto de la cual están muy divididas las opiniones. Pero advirtamos, para evitar probables interpretaciones torcidas, que estas discusiones se refieren solamente a la enseñanza *secundaria* (1).

(1) Además de los trabajos publicados sobre este asunto por la *Internationale Mathematische Unterrichtskommission*, véase la memoria VERONESE: *Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement*. Cong. de París, 1900, pág. 433.



Arraigada definitivamente la Geometría racional, no cabe ya discusión pedagógica respecto de la enseñanza geométrica *universitaria*. Como tampoco es ya posible discutir sobre la Metodología matemática. En el estado actual de esta ciencia, es la Lógica el instrumento único de la demostración; pero la intuición es, y seguirá siendo, la guía de la invención.



CONFERENCIA TERCERA

Funciones de variable real

El concepto fundamental de toda la Matemática es el de *función* o correspondencia, el cual recibe nombres muy diversos. Las correspondencias geométricas, las transformaciones geométricas, las representaciones geométricas, no son sino variaciones formales del mismo concepto. Las nociones de curva, de superficie, de variedad, de sistema de rectas, etc., del concepto de función se derivan.

Vamos a ocuparnos en esta conferencia de las funciones de variable real; insistiendo, sobre todo, en las tres nociones capitales de *función, curva* e *integral.*



Han transcurrido varios siglos hasta que este concepto de función ha alcanzado su grado máximo de generalidad. Pero, antes de reseñar su evolución, haremos un breve examen.

Nuestro concepto de función. Si a cualquiera de los jóvenes que me escuchan le preguntamos por la idea que en él despierta esta palabra *función*, sé de antemano la contestación segura: «Se dice que y es función de x, cuando a todo valor de x corresponden uno o varios valores de y»; definición que, a primera vista, parece coincidir con la actualmente admitida.

Insistamos sobre ella, preguntando: ¿Puede ser completamente arbitraria esta correspondencia? Y la contestación probable sería un *distingamos;* «hay correspondencias arbitrarias y correspondencias que se pueden expresar con los símbolos del Análisis; la Matemática se ocupa de estas últimas, y a ellas solamente nos referimos con la palabra función».

Si tratamos de precisar el significado de esta vaga locución *símbolos del Análisis,* resultará en definitiva, por exclusión de los símbolos $>, <, !, \Sigma, \Pi \ldots$, que la correspondencia en cuestión no tiene tal grado de arbitrariedad; y, en resumen, el concepto de función que posee mi interlocutor es éste: «función de x es toda combinación aritmética, más o



»menos complicada, de funciones elementales, a »saber: potencias y raíces, exponenciales y logarit- »mos, senos y cosenos, etc.»

De acuerdo con esta idea, se dice que una función es *integrable* cuando existe una combinación de estas funciones elementales cuya derivada es aquélla; y, en caso contrario, se considera el signo integral $\int f(x)\,dx$ como algo imposible, desprovisto de todo significado y valor; la función se dice entonces *no integrable*.

Para aquilatar más y más esta idea de función que posee mi interlocutor imaginario, le haremos una última pregunta. Dadas las expresiones analíticas

$$y = x, \quad y = -x + 2,$$

hagamos corresponder a los valores del intervalo (0,1), los valores $y = x$, y a los del intervalo (1,2), los valores $y = -x + 2$. ¿Es una función esta correspondencia? La contestación segura será esta: «No; son dos funciones distintas».

Euler. Pues bien, señores; la idea de función que tiene este joven representativo, coincide con la definición dada por Euler: *Functio quantitatis variabilis est expresio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili. (Introductio in Analysim,* 1750.)

La distinción que hacía nuestro interlocutor entre correspondencias arbitrarias y corresponden-



cias expresables por los símbolos del Análisis, es también de Euler; el cual distingue cuidadosamente entre curvas *arbitrarias,* esto es, dibujadas a capricho, y curvas *geométricas,* es decir, representables por medio de combinaciones más o menos complicadas, de exponenciales y logaritmos, de senos y arcos tangentes, etc.

Este antagonismo entre curvas arbitrarias y curvas geométricas subsistió en la Ciencia solamente hasta Fourier (1807); pero entre nosotros perdura todavía.

Problema de las cuerdas vibrantes. Quien primero puso a prueba el valor de esta distinción entre curvas arbitrarias y curvas geométricas, fué uno de los Bernoulli con motivo del famoso problema de las cuerdas vibrantes (1753). Desviemos de su posición de equilibrio una cuerda tirante, de longitud l, sujeta en dos puntos fijos, abandonándola sin velocidad inicial. Si es y la desviación del punto de abscisa x en el momento t, demuestra Bernoulli la fórmula:

$$y = \Sigma\, a_p \operatorname{sen} p \frac{\pi x}{l} \cos pkt$$

(k constante de la cuerda)

dando ésta como solución más general del problema.

El sagaz espíritu de Euler hizo la observación



siguiente: si esto es cierto, haciendo $t = 0$, la fórmula

$$y = \Sigma\, \alpha_p \operatorname{sen} p \frac{\pi x}{l} \qquad \text{(A)}$$

debe representar la curva que forma la posición inicial de la cuerda; pero siendo ésta una curva arbitraria, trazable a nuestra voluntad, resultaría de aquí que toda curva empírica puede expresarse por medio de un desarrollo en serie del tipo (A), es decir, por una expresión analítica. Y esta conclusión, en el estado de las Matemáticas de entonces, se reputaba absurda.

Más todavía: si la posición inicial de la cuerda fuese un polígono, resultaría, de ser cierta la afirmación de Bernoulli, que una sola expresión analítica puede representar varios segmentos rectilíneos; es decir, coincide con una función lineal en un intervalo, y es igual a otra función lineal en otro intervalo. Esto parecía entonces tan paradójico y tan absurdo, que ni siquiera fué tomado por muchos en consideración.

Fourier. El mismo problema se le presenta más tarde a Fourier (1807) en la teoría del calor, y más atrevido que Euler, contesta afirmativamente, demostrando por primera vez que las series trigonométricas lo mismo sirven para representar curvas geométricas que curvas arbitrarias,



y, en particular, curvas compuestas de arcos geométricos cualesquiera. He aquí uno de los ejemplos más sencillos de Fourier:

La función que hace corresponder a x el valor 0 en todo el intervalo $(0,\pi)$ y el valor $\frac{\pi}{2}$ en todo el intervalo $(\pi, 2\pi)$, admite el siguiente desarrollo en serie convergente:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \dots\dots$$

como el lector puede comprobar fácilmente [1].

Dirichlet y Riemann. El único criterio en que apoyaban los matemáticos su distinción entre funciones analíticas y correspondencias arbitrarias, entre curvas empíricas y curvas geométricas, cayó así por su base. Se planteó inmediatamente el siguiente dilema: o no se consideran las series trigonométricas como funciones, es decir, se excluye el símbolo *lim* entre los ad-

(1) Además de la decisiva influencia de Fourier en la evolución del concepto de función, debe notarse que en sus obras se encuentran en germen ideas sobre la continuidad, la convergencia no uniforme, etc. suficientes para conquistarle el título de precursor de Cauchy y de Weierstrass. (Véase: JOURDAIN, *Note on Fourier's influence on the conceptions of Mathematics*. Cong. de Cambridge, 1913; página 526.)



mitidos para definir las funciones, en cuyo caso habría que suprimir gran parte del Análisis matemático, o se amplía el significado de la palabra función.

La elección no era dudosa; la Matemática prefiere siempre el grado máximo de generalidad, porque generalidad significa supresión de excepciones, y, por tanto, mayor sencillez y belleza. Así se llegó al amplísimo concepto general de función formulado por Dirichlet y Riemann (1), quedando definitivamente incorporado a la Matemática. *Función es toda correspondencia entre dos conjuntos de números, cualquiera que sea el modo de establecerla.*

Ambos elevan a la categoría de teorema riguroso la afirmación de Fourier, y Dirichlet (1829) demuestra por primera vez el fundamental teorema que lleva su nombre:

«Toda función que cumple las condiciones de Dirichlet en un intervalo (2), se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) +$$

$$+ (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + \ldots\ldots$$

la cual expresa el valor de la función en los pun-

(1) La definición de Cauchy, a primera vista más general que la de Euler, no difiere apenas de ella, como luego veremos.

(2) Estas condiciones son: que sea finita en el intervalo y que sólo tenga un número finito de discontinuidades de primera especie y un número finito de máximos y mínimos.



tos de continuidad, y es igual a la semisuma de los dos valores límites de f (x) en los puntos de discontinuidad ordinaria.» Este desarrollo es único, y los coeficientes están dados por las fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Con la adopción del nuevo concepto de función comienzan a aclararse multitud de paradojas antes inexplicables, llegando a su plenitud la era del rigor matemático.

Riemann y Weierstrass. Durante mucho tiempo se admitió como verdad inconcusa que toda función continua tiene derivada en cada uno de sus puntos; convicción nada extraña, puesto que las funciones más sencillas, únicas hasta entonces consideradas, son, en efecto, derivables. Ni deben extrañarnos tampoco la multitud de pretendidas demostraciones de esta afirmación, hoy falsa a todas luces; la demostración de Ampère, las de Lamarle y Gilbert, las más conocidas de Duhamel y Bertrand, revelan únicamente la imperfección del Análisis hasta mediados del siglo último.

Weierstrass dió el primer ejemplo de una función continua que no admite derivada en ninguno



de sus puntos. La conocidísima función de Weierstrass es la siguiente:

$$f(x) = \cos \pi x + b \cos \pi a x + b^2 \cos \pi a^2 x + \ldots\ldots$$

$$\left(a \text{ impar}, b < 1, ab > \frac{3}{2} \pi + 1\right).$$

Mucho antes, Hankel, Schwarz,... habían ya dado ejemplos diversos de funciones continuas no derivables en infinitos puntos; y con el conocido principio de condensación de las singularidades, dió Hankel un medio para construir funciones no derivables, cada vez más complicadas.

Pero, en realidad, el geómetra a quien corresponde la gloria de haber destruído esta falsa idea, durante tan largo tiempo arraigada, es Riemann (1867), en cuyos trabajos aparecen ya funciones continuas no derivables en el conjunto de los números racionales.

Es tan conocido este tema, el cual ha pasado ya a todos los tratados didácticos modernos, que no es preciso insistir más sobre él, limitándonos a citar simplemente las funciones de Dini, no derivables en ningún punto, y que comprenden a la de Weierstrass como caso particular. Una función sencilla de Dini es la siguiente:

$$f(x) = \frac{\alpha}{1 \cdot 3} \cos x + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cos 1.3 \cdot x +$$

$$+ \frac{\alpha^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cos 1.3.5 \cdot x + \ldots\ldots$$



La noción de curva se ha ido desarrollando paralelamente a la de función, pero con cierto retraso respecto de ella. Antiguamente sólo se consideraban admisibles en la Matemática las curvas algebraicas; pero Leibniz amplió punto de vista tan estrecho, proclamando el derecho de muchas otras (por ejemplo: la cicloide) a figurar en las teorías matemáticas (1684). Desde entonces, el concepto matemático de curva ha pasado por una evolución interesante, que vamos a reseñar.

Curvas analíticas. Weierstrass define por primera vez una clase muy general de curvas, que comprende como caso particular a las algebraicas y a todas las trascendentes hasta entonces conocidas; esta noción tan general es la de *curva analítica*. Weierstrass llama así al conjunto de puntos reales e imaginarios definidos por dos series convergentes:

$$x = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \cdots\cdot$$
$$y = b_0 + b_1\, t + b_2\, t^2 + \cdots\cdot$$

ordenadas según las potencias del parámetro t.

Mas esta noción se hizo pronto insuficiente, y comenzaron los matemáticos de la escuela de Weierstrass a ampliar en direcciones diversas la noción de curva, llegando a tal grado de generalidad, que los entes así definidos nada de parecido tenían a la vulgar noción de curva. Para ellos, cur-



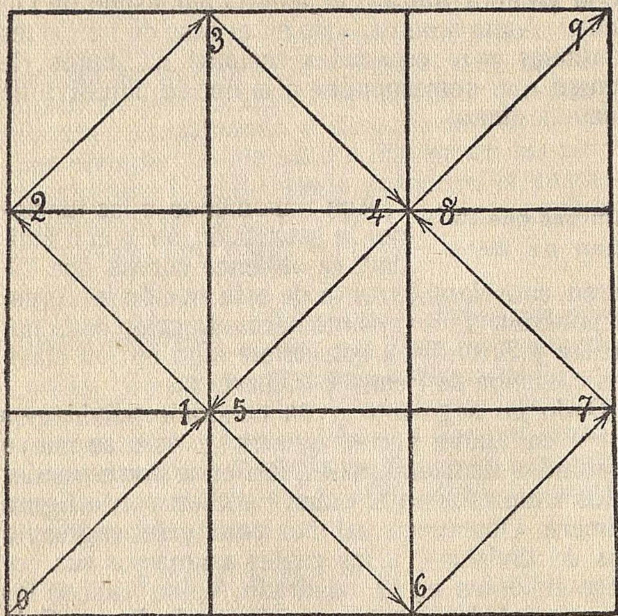
va matemática es el conjunto de puntos definidos por dos funciones reales cualesquiera $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, o por una sola función $y = f(x)$, teniendo la palabra *función* el sentido amplísimo de Dirichlet. Naturalmente, sólo en el caso de funciones continuas muy especiales resultan conjuntos de puntos que corresponden a la noción intuitiva de trazo continuo.

Curvas que llenan un área.

Aun imponiendo a las funciones la restricción de la continuidad, se obtienen curvas que difieren considerablemente de esta noción intuitiva. Expondremos brevemente la construcción dada por Moore y Schönflies, que difiere algo de los clásicos ejemplos de Peano y Hilbert.

Dado un segmento y un cuadrado, dividamos aquél en nueve partes iguales, y éste en nueve cuadrados también iguales, haciendo corresponder éstos a aquéllos en el orden indicado por la figura primera. Obtenemos así diez puntos del segmento (los de división), a los cuales asignamos sus correspondientes en el cuadrado, como indican los extremos de los trazos marcados en la figura. Subdividamos ahora cada segmento y cada cuadrado en nueve partes iguales, haciéndolas corresponder en el orden indicado por la segunda figura. Así tenemos 82 pares de puntos correspondientes. Siguiendo de este modo, obtenemos dos redes de puntos, cada vez más densas, en el segmento y en el cuadrado.

Dado un punto cualquiera del segmento, caben dos posibilidades: o llega a obtenerse como punto





de subdivisión, en cuyo caso ya le hemos asignado su correspondiente en el cuadrado, o aparece dicho punto como límite de una sucesión indefinida

de segmentos, cada vez más pequeños, contenido cada uno en el anterior, a los cuales corresponden



cuadrados también contenidos unos en otros, y que también tienden a cero; por consiguiente, en virtud del axioma de Dedekind, existe un punto único

contenido a la vez en todos; y este punto lo asignamos a aquél primero como correspondiente. Recíprocamente, todo punto del cuadrado tiene al menos un correspondiente en el segmento.

Esta notabilísima correspondencia merece que le dediquemos algunas palabras de comentario. Ya en la conferencia anterior lográbamos—siguiendo a Cantor—hacer corresponder biunívocamente los puntos de un segmento y los de un cuadrado; pero es preciso señalar una diferencia esencial entre una y otra. La correspondencia de Cantor es *biunívoca,* pero no *continua;* las de Peano-Hilbert son *continuas* y unívocas, pero no *biunívocas;* a cada punto del segmento corresponde uno solo del cuadrado; pero hay puntos de éste que tienen varios homólogos en aquél. En una palabra: las curvas de Peano-Hilbert tienen puntos múltiples.

Concepto de dimensión. Inmediatamente ocurre preguntar: ¿Será posible establecer una correspondencia a la vez biunívoca y continua entre el segmento y el cuadrado, y, por tanto, entre una línea y un recinto cualquiera?

Imaginemos por un momento que la contestación fuera afirmativa; entonces la radical separación actual entre las Geometrías de la recta, del plano y de los espacios de cualquier número de dimensiones, perdería todo fundamento. A toda propiedad del plano correspondería otra de la recta, y recíprocamente; en virtud del principio de Klein, am-



bas Geometrías, y, en general, la de un espacio de n dimensiones, serían equivalentes.

Yo os invito a meditar sobre la trascendencia enorme de esta cuestión. Pensad en la labor de tantas generaciones de matemáticos que durante siglos y siglos han construído la Geometría, apoyada sobre el concepto de dimensión, como una de sus piedras fundamentales; y ved que de pronto comienza a desmoronarse este cimiento que parecía inconmovible, y el edificio entero amenaza ruina.

Tranquilicémonos; la contestación no se ha hecho esperar, y ha sido negativa. No es posible establecer una correspondencia *biunívoca y continua* entre dos espacios de distinto número de dimensiones. El concepto básico de dimensión sigue, pues, en pie, y sobre él descansa todavía sólidamente esta ciencia secular. La demostración de esta negativa ha sido lograda recientemente por Brouwer, joven matemático holandés, cuyo nombre hemos de citar más de una vez en estas conferencias, y por Lebesgue, el insigne profesor francés, de cuyas creaciones trascendentales habremos hoy mismo de ocuparnos (1).

(1) BROUWER: *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl.*—Math. Ann. t. 70, 1911.—Demostración perfeccionada en Math. Ann., t. 71, 1912.—LEBESGUE: *Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace.* Compt. rend., t. 152, 1911.

Referencias bibliográficas más extensas sobre este punto y sobre el concepto de curva, pueden verse en nuestros Fundamentos de la *Geometría proyectiva superior*.



Curvas de Jordan.

Volviendo a la curva de Peano, añadiremos que para excluir de las investigaciones generales estos y otros análógos «casos patológicos de la Geometría», se han introducido posteriormente ciertas restricciones al concepto demasiado amplio de curva que antes hemos reseñado, llegando así hasta la noción de curva debida a Jordan, hoy generalmente admitida.

Se llama *curva de Jordan* a todo conjunto de puntos en correspondencia biunívoca y continua con los puntos de un segmento. Si hay un punto único de la curva al cual corresponden los dos extremos del segmento, la curva se llama *cerrada*, y en caso contrario se llama *abierta*. En ambos casos carece de puntos múltiples.

Esta noción de curva de Jordan es mucho más amplia que la de curva analítica de Weierstrass, pues no exige la existencia de tangente en ningún punto; ejemplos de esto se presentan en la teoría de funciones automorfas. Pero es mucho más restringida esta noción que la antes reseñada, quedando desde luego excluídas, en esta definición, las curvas que llenan un área.

En resumen: cuando se usa en cualquier teoría matemática esta discutidísima palabra *curva*, se sobreentiende, salvo advertencia en contrario, que se trata de una curva de Jordan, grado máximo de generalidad hasta hoy bien estudiado (1).

(1) Este es el significado que debe atribuirse a la frase de Study: «Los matemáticos no se han puesto de acuerdo todavía acerca del concepto de curva.»



Orígenes del Cálculo integral.

La noción de integral definida e indefinida es, en realidad, muy antigua; mucho más que la noción de derivada. La integral *definida* es el límite de una suma especial, cuyos sumandos tienden a cero; si uno de los extremos de la integral es variable, el valor de la integral depende de él; es decir, es *función* de x; ésta es la integral *indefinida*. Todas las cuadraturas de áreas curvilíneas que se encuentran en Arquímedes son, en realidad, cálculos de integrales definidas. Los métodos de exhaustación de los griegos a esto mismo se reducen.

En el siglo XVII se inventa el Cálculo diferencial, es decir, se hallan reglas diversas para calcular el límite de un cociente de dos infinitamente pequeños, y, aplicadas estas reglas a los incrementos de las áreas, se ve, con sorpresa, que la derivada del área variable encerrada por una curva con el eje de las x, coincide con la función que define tal curva. El día en que esta coincidencia entre la función primitiva y la integral llegó a descubrirse, nació el Cálculo integral. El cálculo de las áreas, antes tan artificioso y difícil, quedó reducido a la obtención de las funciones primitivas.

Esta coincidencia ha subsistido mientras los conceptos de función y de integral han conservado su primer carácter restringido; pero desaparece al ampliarse éstos, como luego veremos.



Euler. Ya hemos explicado cuál era el concepto de función antes de Fourier y Dirichlet. Para Euler y todos sus contemporáneos, la palabra función era sinónima de combinación aritmética más o menos complicada de exponenciales y logaritmos, de potencias y raíces, etc. Cuando se lograba hallar una de estas combinaciones, cuya derivada coincidía con la función dada, se decía que ésta era *integrable;* en caso contrario, el símbolo $\int f(x) dx$ se consideraba como algo desprovisto, no sólo de valor práctico, y, por tanto, de interés, sino también falto de sentido; la función se declaraba entonces no integrable.

Este punto de vista de Euler es todavía corriente entre nosotros. Mejor dicho, nuestro criterio en este punto es anterior al de Euler y sus contemporáneos; porque éstos admitían también como integral una serie cualquiera, y entre nosotros se declara no integrable una función, cuando no se obtiene una de nuestras series conocidas.

Nuestro concepto de integral. Examinemos atentamente este punto de vista, y veamos cuál es su valor teórico y cuál su valor práctico. El interés teórico queda anulado desde el momento en que el concepto de función adquirió significado más general. Las exponenciales, arcos tangentes, etc., son, en efecto, funciones que conocemos y manejamos mejor que las demás, porque las tenemos tabuladas. Pero ¿acaso no están igualmente tabuladas muchas otras,



como, por ejemplo, las elípticas, esféricas, de Bessel, etc.? ¿Y por qué excluir éstas, y no las anteriores?

Desde el punto de vista especulativo, las funciones cuya integral puede expresarse por medio de una combinación de las citadas elementales, y nada más que de ellas, no tienen mayor valor científico que lo tenían literario aquellas comedias de la época de decadencia de nuestra literatura, escritas sin utilizar la vocal *e* o sin la *u*, o sólo con la vocal *a*.

¿Qué valor práctico tiene el hallar explícitamente tal combinación de las pocas funciones citadas? Si necesitamos para un problema de Técnica utilizar una integral, a nadie podrá ocurrírsele servirse de aquella expresión, cuyo cálculo es, las más de las veces, impracticable, aun siendo muy sencilla la función integrada. Nos serviremos, por el contrario, de un intégrafo o de un planímetro; y si no disponemos de ellos, utilizaremos sencillamente un curvímetro, obteniendo aproximación que suele bastar en tales aplicaciones técnicas. Y si ésta no es suficiente, haremos el cálculo numérico por el método de Runge u otro análogo.

Si observamos, por último, que las integrales de uso frecuente, por ejemplo, la $\int e^{-t^2} dt$, que se presenta en los problemas de probabilidades, están tabuladas, y su cálculo numérico es infinitamente más sencillo que si se pudieran integrar en la forma acostumbrada, podemos concluir que el valor teórico y práctico del antiguo empeño de integrar toda clase de funciones por medio de las



elementales más sencillas, corre parejas con el valor actual de la también antigua pretensión de resolver todas las ecuaciones algebraicas por medio de radicales, o la más reciente de construir la Geometría algebraica con los recursos cuadráticos de la Geometría proyectiva elemental.

Unos y otros problemas, que un día tuvieron interés real, han sido ya incorporados a los famosos de cuadrar el círculo, trisecar el ángulo o duplicar el cubo, sin otros instrumentos que la regla y el compás. Y no sólo ha sido demostrada la imposibilidad de todos ellos, sino que, aun dada ésta por obtenida, bien escaso sería su interés y nulo su valor práctico.

Cauchy. En la evolución de los conceptos básicos de función y de integral que estamos reseñando, no deja Cauchy la misma profunda huella que en otras ramas del Análisis.

No quiere esto decir que el progreso que le debe la teoría de funciones sea pequeño; bastará recordar sus definiciones rigurosas de la continuidad, de la convergencia, etc. Pero su concepto de función, a pesar de la aparente amplitud de sus definiciones, no difiere apenas del de Euler. Cauchy supone siempre implícitamente que la correspondencia está expresada por una combinación de funciones elementales.

Su concepto de integral no es tampoco muy superior al de Euler, pues se funda como él en la intuición geométrica. No será preciso detenerse en



explicarlo aquí, porque es el adoptado en los libros de la mitad del siglo pasado (Duhamel, Sturm, Moigno, etc.), bien conocidos de todos.

Este concepto de integral de Cauchy no es aplicable a multitud de funciones, como son, verbigracia, las discontinuas en un conjunto denso de puntos. Sea, por ejemplo, la función de Dirichlet:

$$y = \lim_{m \to \infty} [\lim_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n}]$$

Si x es racional, para valores enteros de m bastante grandes es $m!x$ un número entero, y por tanto, es el coseno ± 1, pero su potencia de exponente $2n$ es $+1$, luego $y = 1$. En cambio, si x es irracional, es siempre $m!x$ irracional, y, por tanto

$$|\cos m!\, \pi x| < 1,$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n} = 0 \quad \text{de donde:} \quad y = 0.$$

En todos los puntos es la función discontinua, y carece de integral en el sentido de Cauchy.

Integral de Riemann. Sea $y = f(x)$ una función uniforme y finita en el intervalo (a,b). Dividido éste en n partes iguales consecutivas por los puntos

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots\ x_{n-1},\ x_n = b,$$



sean sus longitudes:

$$\delta_1 = x_1 - x_0, \quad \delta_2 = x_2 - x_1, \quad \ldots \delta_n = x_n - x_{n-1}.$$

Llamando M_i y m_i á los extremos superior e inferior [1] del conjunto de valores que toma $f(x)$ en el intervalo δ_i, formemos las sumas

$$S = M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \ldots\ldots + M_n \delta_n$$
$$s = m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \ldots\ldots + m_n \delta_n .$$

Haciendo crecer el número n de intervalos, tienden estos a cero. Ambas sumas tienen entonces límites determinados L y l, independientes del modo de división adoptado. Estos números se llaman *integral superior* o por exceso, e *integral inferior* o por defecto (Jordan), designándose así:

$$L = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad l = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Así, por ejemplo, en la función de Dirichlet, cualquiera que sea la división en intervalos parciales, es

$$M_i = 1, \quad m_i = 0;$$

(1) Se llama *extremo (borne) superior* de un conjunto de números, al menor de todos los números no inferiores a ninguno del conjunto. *Extremo inferior* es el mayor de los números no superiores a ninguno del conjunto. La demostración puede verse en Goursat, Vallée-Poussin, o en nuestras *Lecciones de Análisis Matemático*, 2.° curso.— Madrid, 1916.



luego

$$S = \delta_1 + \delta_2 + \ldots\ldots + \delta_n = b - a$$
$$s = 0 + 0 + \ldots\ldots + 0 = 0,$$

por consiguiente:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = b - a \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = 0.$$

Cuando las dos integrales superior e inferior coinciden, la función se llama *integrable* en el sentido de Riemann, escribiéndose entonces:

$$L = l = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Toda función integrable en el sentido de Cauchy lo es también en el de Riemann, pero no inversamente.

No podemos entrar en la exposición de la teoría de Riemann, pues además de no ser éste el objeto de las conferencias, está expuesta en todos los tratados modernos extranjeros. Véanse, por ejemplo, los de Goursat y de la Vallée-Poussin. Citaremos solamente algunos resultados importantes muy generales:

Toda función continua es integrable.

Toda función constantemente creciente, o constantemente decreciente (funciones *monótonas)*, es integrable.

La suma, diferencia, o producto de funciones integrables, es también integrable.

Integral y función primitiva.

Con Riemann cesa la identidad entre *integral* y *función primitiva;* y cesa en el momento mismo en que presenta funciones integrables, cuya integral es discontinua; en efecto, no admitiendo derivada esta última a causa de su discontinuidad, no puede ser función primitiva de ninguna otra.

Desde este momento se hace esencial la distinción entre ambas nociones. Por una parte, la integral definida o indefinida, esto es, el límite de la suma de infinitamente pequeños, o el área de la curva que representa la función; por otra parte, la función primitiva, esto es, la función cuya derivada coincide con la primera.

Una función integrable puede carecer de función primitiva, y recíprocamente, una función obtenida derivando otra, puede no ser integrable (Lebesgue). En el caso más sencillo, cuando la función que se integra es continua, la integral y la función primitiva coinciden.

La integral de Riemann se ha hecho insuficiente en estos últimos años, pues no permite resolver siempre el problema de hallar la función primitiva de una dada. El matemático francés Lebesgue (1)

(1) «Si l'on voulait toujours se limiter à la considération de ces bonnes fonctions, il faudrait renoncer à résoudre bien des problèmes à énoncés simples posés depuis longtemps. C'est pour la résolution de ces problèmes et non par amour des complications, que j'ai introduit dans ce Livre une définition d'intégrale plus générale que celle de Riemann.» (LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. París, 1904; pag. VI.)



ha enriquecido la Ciencia con la amplísima noción de integral que lleva su nombre, la cual constituye una de las más grandes conquistas de este siglo, y ha de revolucionar toda la teoría de funciones.

La concepción de Lebesgue se funda en la teoría de los *conjuntos medibles*, de la cual daremos ligerísima idea.

Conjuntos medibles. Dado un conjunto (x) de puntos de un intervalo (a, b) de longitud $l = b - a$, tomemos segmentos parciales cualesquiera, tales que todo punto de (x) quede incluído al menos en uno de ellos, y sea s_i la suma de todos estos segmentos, la cual puede ser mayor, igual, o menor que l. Si tomamos todos los sistemas posibles de segmentos así definidos, obtenemos infinitos números s_i; este conjunto de números s_i tiene siempre un extremo inferior s, y este número s (que no excede nunca a l), se llama *medida exterior* del conjunto (x).

Si hallamos la medida exterior del conjunto complementario del (x) y la restamos de la longitud total l, obtenemos otro número s que se llama *medida interior* del conjunto (x). Si ambas medidas coinciden, el conjunto se llama *medible*.

Aplíquense estas definiciones al conjunto de varios puntos aislados, y resulta $s=0$, $S=0$; tómese un conjunto (x) formado por varios intervalos separados, y se obtiene como medida la suma de longitudes. Esta noción general encierra, pues, como caso particular, el vulgar concepto de longitud.



Integral de Lebesgue.

Las ideas capitales en que se basa la concepción de Lebesgue, son las siguientes: 1.ª Generalizar la integral de Riemann haciéndola aplicable, no ya a las funciones definidas en un intervalo, sino en un conjunto *cualquiera* de puntos. 2.ª En vez de subdividir el intervalo de la variable x, se subdivide el campo de variabilidad de la función y.

Sea $y = f(x)$ una función finita y uniforme definida en un cierto conjunto medible (x), y sean m y M los extremos inferior y superior del conjunto de valores que toma y en dicho conjunto (x); si dividimos el intervalo (m, M) en n partes iguales por medio de los puntos

$$m = y_0, \ y_1, \ y_2, \ \ldots\ldots \ y_{n-1}, \ y_n = M,$$

puede suceder que sea medible el conjunto de valores de x, cuya ordenada correspondiente está comprendida entre dos de ellos; por ejemplo, los valores de x que cumplen la condición

$$y_2 < f(x) < y_3 \, ;$$

y si esto se verifica para todos los intervalos (y_{i-1}, y_i), cualquiera que sea n, la función se llama *medible.*

Sean $l_1, l_2, \ldots\ldots, l_n$ las medidas así obtenidas en los diversos intervalos, y formemos las sumas

$$s_n = l_1 y_0 + l_2 y_1 + \ldots\ldots + l_n y_{n-1}$$
$$S_n = l_1 y_1 + l_2 y_2 + \ldots\ldots + l_n y_n \, .$$



Tomando n cada vez mayor, al decrecer indefinidamente los intervalos elegidos, los números s_n tienden a un límite s, y los S_n a otro límite S. Estos dos números s y S son las integrales *inferior* y *superior* de Lebesgue. Cuando ambos coinciden, la función se dice *integrable* en el sentido de Lebesgue.

Para que la integral de Lebesgue sea una generalización útil, debe comprender como caso particular los anteriores conceptos de integral. Así sucede, en efecto; toda función integrable en el sentido de Riemann lo es también en el sentido de Lebesgue, siendo iguales ambos resultados. Pero, aun suponiendo que el campo de variabilidad de x sea un intervalo, no todas las funciones integrables en el sentido de Lebesgue admiten integral de Riemann, pues sólo aquellas en que el conjunto de los puntos de discontinuidad tiene *medida nula* pueden ser integrables en el sentido de Riemann. La integral de Lebesgue constituye, pues, una amplísima generalización de todos los anteriores conceptos de integral.

Cálculo de la función primitiva. Ya hemos señalado repetidamente la diferencia esencial que existe entre los conceptos de *integral* y *función primitiva*. Desde el momento en que Riemann descubrió esta diferencia, quedó implícitamente planteado el problema siguiente:

«Dada una función, averiguar si admite función primitiva, y, en caso afirmativo, hallar ésta.»

Desde luego, si la función dada es continua, la



integral indefinida de Cauchy resuelve completamente el problema, puesto que coincide con la función primitiva; pero también hemos consignado el hecho de que no sucede lo propio para las funciones discontinuas, que cada día adquieren mayor importancia matemática y física.

La integral de Lebesgue resuelve esta cuestión para clases muy extensas de funciones (por ejemplo, las limitadas o acotadas), y no sólo aquel problema, sino este otro más general:

«Dada una función, reconocer si ésta es el número derivado superior o inferior de otra función, y hallar ésta.»

La noción de función primitiva adquiere así un grado de generalidad mucho más amplio.

La solución general de ambos problemas para toda clase de funciones exige todavía una nueva generalización de la noción de integral. Esta ha sido realizada recientemente por Denjoy [1], joven discípulo de Lebesgue; pero todavía no ha tenido la general aceptación que las teorías de éste.

Funciones discontinuas.

Examinando retrospectivamente la evolución del concepto de integral, vemos que sus generalizaciones sucesivas han venido impuestas por la amplitud, siempre creciente, de las funciones estudiadas por la Matemática, en su marcha ascendente de lo sencillo a lo complicado.

(1) DENJOY: *Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale.*—Compte. rend. 1912.



Durante muchos siglos se han estudiado solamente las funciones continuas, únicas que se consideraban útiles a las ciencias naturales. *Natura non facit saltus* era el lema de la antigua Matemática. Y, en efecto, así puede aceptarse como primera aproximación.

Con Fourier comienzan a despertar interés las funciones discontinuas, pero sólo las más sencillas: las que sólo presentan discontinuidades ordinarias aisladas, a las cuales la integral de Cauchy es todavía aplicable. Un estudio más profundo da carta de naturaleza en la Matemática a otras funciones cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto *denso*, y Riemann amplía el concepto de integral para hacerlo aplicable a éstas; pero pronto se hace insuficiente para las funciones cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto de medida no nula, y entonces se imponen como algo necesario las generalizaciones de Lebesgue y Denjoy.

¿Son suficientes éstas para las actuales necesidades de la teoría de funciones? (1) Recordemos someramente los profundos estudios de Baire sobre esta moderna teoría de las funciones discontinuas.

(1) La bibliografía de esta teoría y sus resultados más importantes, pueden verse en Baire: *Leçons sur les fonctions discontinues*. — París, 1905. — Consúltese, además: Pierpont, *The theory of function of real variables*.— Boston, 1905.



Investigaciones de Baire.

Llama Baire funciones discontinuas *de primera clase* a las que son límites de funciones continuas en un intervalo (a, b); *de segunda clase* a las que son límites de funciones discontinuas de primera clase, etc. Llama funciones *de clase trasfinita* ω a las que son límites de funciones de clase finita, sin pertenecer a ninguna de estas clases. Y, en general, dado un número trasfinito π, llama funciones discontinuas de clase π a las que aparecen como límites de funciones discontinuas de clase inferior a π, sin pertenecer a ninguna de estas clases.

Pues bien, la integral de Lebesgue es aplicable a todas las funciones de cualquiera de estas clases de Baire.

Baste con esta sucinta reseña para despertar en los jóvenes que me escuchan el interés por estos novísimos estudios de las funciones discontinuas, los cuales descubren horizontes dilatados, llenos de propiedades sorprendentes y de resultados útiles a las ciencias afines. En la teoría de la energía, como antes de la teoría de la materia, el concepto de discontinuidad arraiga más cada día.

La Matemática clásica era la ciencia del *Continuo*. La Matemática futura se preocupará principalmente del estudio de lo *discontinuo;* todo un mundo nuevo, infinitamente más extenso y complicado.

Al antiguo lema, demasiado exclusivista, ha sustituído este otro, mucho más amplio y más real: *Natura facit saltus*.



CONFERENCIA CUARTA

Método del paso al límite en la teoría de funciones

Los dos tipos de paso al límite.

La esencia del método infinitesimal, que hoy se extiende a todas las ramas de la Matemática, estriba en una idea sencilla: *el paso al límite;* operación que se presenta ya en los umbrales de esta Ciencia, lo mismo en la Aritmética elemental que en la Geometría métrica.

Consideremos una operación aritmética cualquiera entre n datos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, y sea y_n el resultado obtenido. Hagamos crecer el número n de datos, y el resultado y_n varía con n. Si esta sucesión de números y_n tiene un límite y, al crecer n indefinidamente, tenemos un nuevo algoritmo, llamado *indefinido,* que, de los infinitos datos $a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$, conduce al resultado y.



Hay dos tipos de paso al límite, que podemos caracterizar así: *paso al infinito numerable* y *paso al infinito continuo*. Mejor que una definición, aclarará esta idea un ejemplo.

Dada una suma, por ejemplo:

$$y_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

si llevamos estos números como ordenadas, sobre puntos del eje x equidistantes el intervalo 1, representa y_4 el área de un polígono compuesto de 4 rectángulos de base 1 y alturas a_1, a_2, a_3, a_4.

Ahora podemos hacer crecer de dos modos el número de sumandos: por *agregación* indefinida de nuevos sumandos, formados según una ley cualquiera prefijada, o por *interpolación* de nuevas ordenadas, según una ley arbitraria. En el primer caso, la ordenada en el punto de abscisa n (n número natural), vendrá dada por una función $\varphi(n)$, definida para los valores $n = 1, 2, 3, \ldots.$. En el segundo caso, la ordenada en el punto de abscisa x, estará dada por una función $f(x)$ definida para todo valor entero, fraccionario o irracional de x, comprendido en el intervalo $(0, a)$. El paso al límite, al crecer indefinidamente el número de sumandos, nos da dos algoritmos fundamentales distintos: la *serie* y la *integral*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \qquad y = \int_0^a f(x)\,dx.$$



Sistematización de la teoría de funciones.

Es bien sabido que el paso al infinito numerable se puede aplicar a todo algoritmo aritmético, obteniéndose un algoritmo indefinido. Efectuado en combinación con la suma o el producto, resultan las *series* y los *productos infinitos*; aplicado a las fracciones continuas, a los determinantes, etc., obtenemos las *fracciones continuas infinitas*, los *determinantes infinitos*, etc.

Pero es menos sabido que este mismo paso al límite, en cualquiera de sus dos formas, puede aplicarse a todo proceso algebraico o funcional, obteniéndose teorías fundamentales de la Matemática clásica, y otras recientes, a las que espera brillante porvenir; todas ellas sin relación aparente y que, sin embargo, dimanan de esta sola idea matriz.

Así, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales aparecen como límites de ecuaciones algebraicas; las *sucesiones indefinidas de funciones*, las *series funcionales*, los *productos infinitos funcionales*, las *fracciones continuas funcionales*, resultan de combinar el paso al infinito numerable con los respectivos algoritmos funcionales. Apliquemos este mismo paso al límite a las funciones de n variables, y obtenemos la teoría de las *funciones de infinitas variables;* pero si le aplicamos el paso al infinito continuo, nace la teoría moderna de las *funciones de líneas*. Efectuemos el primer paso al límite en los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, y resulta la teoría de los *sistemas de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas;* pero si hacemos el segundo paso al límite,



obtenemos la teoría de las *ecuaciones integrales*. Apliquemos a unas y otras el mismo proceso, y nacen las novísimas teorías de las *ecuaciones íntegro-diferenciales* y de las *ecuaciones en derivadas funcionales*.

He aquí, pues, sistematizadas estas teorías modernas, cuya íntima conexión no podría sospecharse. De ellas vamos a ocuparnos en esta conferencia, terminando así el capítulo que hemos titulado: *Funciones de variable real*.

Desarrollo en serie de Fourier.

En la conferencia anterior, al hablar de la evolución de los conceptos fundamentales, nos ocupábamos incidentalmente de las series de Fourier, porque ellas plantearon la necesidad de ampliar el restringido concepto de función del siglo XVIII. Decíamos que Dirichlet fué el primero en demostrar que toda función $f(x)$ que posee en un intervalo un número finito de discontinuidades de primera especie y un número finito de máximos y mínimos, se puede desarrollar en serie trigonométrica:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots, \quad (A)$$

y este desarrollo es único, estando dados los coeficientes por las fórmulas:

$$(B) \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx \cdot dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen} nx \cdot dx. \end{cases}$$

Así, por ejemplo, dada en el intervalo $(0,2\pi)$ la siguiente función discontinua:



$$\begin{cases} y = 0 & \text{para} \quad 0 < x < \pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} & \text{»} \quad \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

se obtiene el desarrollo:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \ldots..$$

El valor que da la serie de Fourier en cada punto de discontinuidad, es la media aritmética de los valores a que tiende la función a la derecha y a la izquierda de ese punto. Así, en este ejemplo, resulta:

$$f(\pi) = \frac{f(\pi^{+}) + f(\pi^{-})}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

El cálculo de los coeficientes dados por las fórmulas (A), se hace muy sencillamente utilizando los aparatos llamados *analizadores armónicos.* El mayor de todos los construídos es el de Michelson, en Chicago, que da los 160 primeros coeficientes del desarrollo, y, recíprocamente, dada una serie trigonométrica cualquiera, da automáticamente la suma de sus 160 primeros términos.

Fenómeno de Gibbs.

Este monstruoso aparato de Michelson ha prestado a la teoría un importante servicio, descubriendo la paradoja llamada *fenómeno de Gibbs;* de ella daremos ligera idea.



¿Qué significado tiene una serie trigonométrica y, en general, una serie funcional cualquiera? El siguiente: para cada valor particular $x = a$, se halla la suma de la serie, es decir: $\lim_{n \to \infty} S_n(a)$, y este número es el correspondiente al primero. En una palabra, se fija primero x y después se hace crecer n; obteniendo así una función única: $y = f(x)$.

Procedamos ahora a la inversa, esto es, fijemos primero n, y después hagamos variar x; obtenemos así la función

$$y = S_n(x),$$

cuya curva representante se aproxima a la anterior, tanto más cuanto mayor se tome n. Dibujemos las curvas sucesivas:

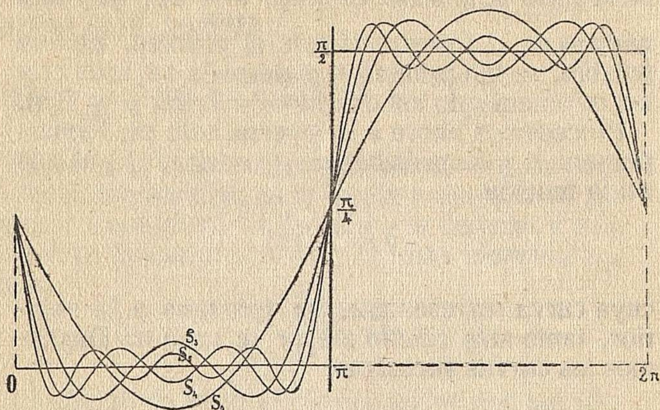
$$y = S_1(x), \quad y = S_2(x), \ldots, \quad y = S_n(x), \ldots,$$

y veamos la curva límite a que se aproximan. Entonces no obtenemos ya puntos aislados, sino un trazo continuo que, además de contener todos los trazos continuos componentes de la curva $y = f(x)$, une, sin solución de continuidad, por medio de un segmento reclilíneo, los puntos en que $f(x)$ pasa bruscamente de un valor a otro.

Pero aquí viene el hecho inesperado. Además de obtener este trazo continuo, resultan dos prolongaciones rectilíneas del segmento vertical, perfectamente apreciables con el aparato de Michelson. Por primera vez fueron observadas por Gibbs,



en 1899, y de este hecho sorprendente dió cuenta en el periódico *Nature*. Atribuyóse al principio a una imperfección del aparato; mas pronto se de-



mostró rigurosamente la necesidad de la aparición de estos dos trazos rectilíneos. Gibbs ha dado la fórmula general que expresa la longitud de éstos. En nuestro ejemplo (1), esta longitud es:

$$-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi = 0{,}14 \ldots\ldots$$

No podemos insistir más sobre esta famosa paradoja. De los trabajos posteriores de que ha sido

(1) En la figura se ha adoptado para las ordenadas unidad doble que para las abscisas.



objeto, sólo citaremos la memoria fundamental de FÉJER en *Math. Ann.*, t. 64 (1907), a la cual remitimos a quien desee profundizar este estudio.

Generalizaciones de las series de Fourier.

El desarrollo en serie trigonométrica es el tipo más sencillo de desarrollos muy generales que comprenden todas las funciones útiles en las Matemáticas aplicadas [1].

El mismo Fourier emprendió el estudio de desarrollos trigonométricos más generales, a saber: series cuyos términos son senos y cosenos de $a_1x, a_2x, \ldots, a_nx, \ldots$, siendo las a no precisamente los números $1, 2, 3, \ldots$, sino raíces de una ecuación trascendente. A este problema le condujo el estudio del enfriamiento de una esfera, suponiendo que la temperatura depende solamente del tiempo y de la distancia al centro.

Cauchy continuó tales estudios, aplicando su fecundo Cálculo de los residuos. Pero el resultado más general posible a que puede llegarse en esta dirección, ha sido logrado por Hilbert en nuestros días, por medio de la teoría de las ecuaciones ingrales, demostrando que toda función del tipo

$$\int_a^b K(s, t)\, f(s)\, ds$$

(1) Recordaremos que no todas las series trigonométricas del tipo (A) son series de Fourier; puede, en efecto, suceder que, al desarrollar en serie de Fourier la función que define (A), resulte otra distinta de ella. Para que una serie trigonométrica coincida con su serie de Fourier, es preciso que sus coeficientes satisfagan a las condiciones (B),

admite un desarrollo funcional cuyos términos son funciones *ortogonales* dos a dos.

Recordemos que dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ se llaman *ortogonales* si cumplen la condición:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \text{ [1]}.$$

Son, por tanto, funciones ortogonales los senos y cosenos de múltiplos de x, que componen la serie de Fourier, y ésta queda incluída como caso particular en este teorema general de Hilbert.

Problemas actuales de la teoría.

Ya que por la índole de estas conferencias no podamos entrar en la exposición de los trabajos recientes de Carathéodory, Fèjer, etc., enunciemos siquiera los problemas todavía no resueltos.

Du Bois-Reymond dió por primera vez en su Memoria capital (1876) ejemplos de funciones continuas cuyas series da Fourier no convergen en todo el intervalo. Schwarz dió también ejemplos de esta misma anomalía. Inmediatamente se plantea, en vista de ellos, la siguiente cuestión más general: ¿Hay funciones continuas cuya serie de Fourier sea divergente en todo el intervalo? Stek-

(1) Esta es una generalización natural, por paso al límite, del concepto de ortogonalidad de la Geometría elemental. (Véase, en esta misma conferencia, pág. 126.)



loff ha creído poder contestar afirmativamente (1), pero no ha logrado dar la demostración completa.

Cuestión análoga a ésta y, como ella, no resuelta todavía, es la siguiente: ¿Hay funciones continuas cuya serie de Fourier sea convergente en todo el intervalo, pero no lo sea *uniformemente* en ningún intervalo parcial?

Es sabido que existen funciones *sumables* en el sentido de Lebesgue, pero no integrables en el sentido de Riemann, en el intervalo $(0,2\pi)$ (2), y que, sin embargo, se pueden representar por series de Fourier convergentes. ¿Habrá funciones de éstas que no sean integrables, en el sentido de Riemann, en *ningún intervalo?*

Interesantes problemas son éstos, que esperan todavía contestación satisfactoria. Y no son los únicos. Las mismas operaciones elementales con series de Fourier están muy poco estudiadas. Y así ocurren preguntas como ésta: De la convergencia de las series de Fourier relativas a dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, ¿puede deducirse la convergencia de la serie de Fourier correspondiente a la función producto o cociente de ambas? (3)

(1) *Comptes rendues*. Paris, 1902.
(2) Véase la conferencia 3.ª
(3) El estado actual de la teoría de las series de Fourier puede estudiarse en LEBESGUE: *Leçons sur les séries trigonométriques*.—Paris, 1906.—CARSLAW: *Fouriers series and integrals*.—London, 1906.



Euler. Es un hecho bien conocido que Abel y Cauchy crearon por primera vez, al comenzar el siglo XIX, una teoría rigurosa de las series. Hasta entonces, se manejaba este algoritmo sin tener idea clara de su significado. Por ejemplo, Euler, para demostrar que la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$$

tiene como suma $\frac{1}{2}$, procede así:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots = 1 - (1 - 1 + 1 \cdots\cdots) = 1 - S,$$

de donde $2\,S = 1$, o sea: $S = \frac{1}{2}$.

Después de la organización de la teoría por Cauchy, este razonamiento nos parece totalmente inadmisible. Si un alumno de Universidad diera hoy esta demostración en los exámenes, revelando el desconocimiento de las más elementales precauciones que exponen todos los tratados, acerca del manejo de series, sería suspenso sin titubear.

Y, sin embargo, hay en esta conclusión ilegítima de Euler un cierto fondo de verdad que impide desecharla sin muy profundo examen. Porque se da un hecho notable. La serie carece indudablemente de valor numérico; pero si hubiera que asignarle uno, éste debería ser precisamente $^1/_2$,



pues todo cálculo numérico que a ella nos conduzca, admite, en efecto, esta solución.

Por ejemplo, tenemos la igualdad:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots,$$

válida solamente para el intervalo $-1 < x < 1$. Demos, sin embargo, el valor $x = 1$, y, en efecto, el primer miembro resulta ser $^1/_2$.

Más adelante veremos que, por muy diversos caminos, llegamos siempre a este mismo valor $^1/_2$. Si, por ejemplo, se aplica a esta serie el concepto de *valor más probable*, como hacía Leibniz, resulta también $^1/_2$ (1).

Abel y Cauchy. Al edificar Abel y Cauchy sobre base rigurosa la teoría de las series, demostrando que sólo las convergentes tienen significado numérico, parece como si ambos tuvieran cierto temor de excluir en absoluto las series divergentes (2).

«Las series divergentes—dice Abel—son, en »general, cosas fatales, y es vergonzoso que haya »quien se atreva a fundar sobre ellas demostración

(1) Sobre este punto consúltese Borel: *Leçons sur les séries divergentes*.—Paris, 1901.

(2) Suelen llamarse divergentes a todas las series no convergentes, lo mismo si S_n crece indefinidamente, que si carece de límite.



»ninguna...; la parte más esencial de las Matemá-»ticas está sin base. Es cierto que la mayor parte »de los resultados son exactos; pero esto es una »cosa verdaderamente extraña. Yo me ocupo en »averiguar la razón..., problema muy interesante.»

Los mismos escrúpulos asaltan a Cauchy antes de eliminar las series divergentes de todo razonamiento matemático. He aquí un pasaje suyo: «Me »he visto obligado—dice—a admitir diversas pro-»posiciones que parecerán *algo duras;* por ejem-»plo, que una serie divergente carece de suma».

Vemos claramente la preocupación de los dos grandes matemáticos. Por una parte, se veían constreñidos por la Lógica a excluir las series divergentes de todo razonamiento riguroso; por otro lado, no acertaban a explicarse que, a pesar de la ilegitimidad de su empleo, los resultados con ellas obtenidos fuesen casi siempre exactos [1].

Abel murió poco después sin poder cumplir su promesa. Cauchy terminó la obra iniciada en aquella famosa comunicación a la Academia, que—según las biografías—hizo salir despavorido a Laplace para comprobar la convergencia de las series utilizadas en su Mecánica celeste; y las series divergentes fueron expulsadas del Análisis.

(1) Antes que ambos había sospechado D'Alembert la ilicitud del empleo de las series divergentes. «Todos los razonamientos fundados sobre series que no son convergentes, me parecen muy sospechosos, aunque los resultados estén de acuerdo con las verdades conocidas.»—*Opusc. Math.*, 5, 1768; pág. 183.



Leyendo las obras posteriores de Cauchy, se nota, sin embargo, que la preocupación del uso legítimo de las series divergentes le acompañó toda su vida. Parece como si le persiguiera constantemente, atormentando su conciencia, el espectro de la víctima por él sacrificada en aras del rigor.

Pero no llegó a una explicación general. Solamente para algunas series especiales, como la de Stirling, demuestra la legitimidad de su empleo para calcular valores aproximados de la función que le da origen.

Stieltjes y Poincaré. Pasando por alto los muy notables trabajos de Laguerre, que no llegan a constituir un sistema, llegamos a Stieltjes y Poincaré, los cuales crean simultáneamente una teoría que comprende clases muy generales de series divergentes, y justifican rigurosamente la licitud de su empleo. Pero la teoría de Poincaré tiene alcance mayor y ofrece más amplios horizontes que la del insigne matemático holandés. Indicaremos a grandes rasgos la esencia de su teoría de las *series asintóticas,* dando idea de sus aplicaciones.

Definida $f(x)$ en todo el campo real, supongamos que sea $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c_0$. Este valor c_0 puede considerarse como una primera aproximación de la función, y el error es tanto menor cuanto más grande se toma x. Puesto que $f(x) - c_0$ tiende a 0 al crecer x indefinidamente, puede suceder que $x(f(x) - c_0)$ tenga límite finito c_1; es decir:



$$\lim_{x \to \infty} x\,(f(x) - c_0) = c_1,$$

o sea:

$$\lim_{x \to \infty} x \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} \right) = 0;$$

luego $c_0 + \frac{c_1}{x}$ puede entonces considerarse como una segunda aproximación, puesto que no sólo tiende a cero su diferencia con $f(x)$, sino que es un infinitamente pequeño de segundo orden por lo menos.

Así siguiendo, obtenemos un desarrollo:

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

tal que

$$\lim_{x \to \infty} x^n \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{x^2} - \ldots - \frac{c_n}{x^n} \right) = 0.$$

Poincaré dice entonces que la serie (A) representa *asintóticamente* la función $f(x)$.

La interpretación geométrica de esto es muy interesante y útil. Dibujada la curva que representa la función $y = f(x)$, la recta $y = c_0$ es una primera aproximación de ella, puesto que es su asíntota. La hipérbola $y = c_0 + \frac{c_1}{x}$ es una aproximación



mejor, puesto que tiene ya un contacto de segundo orden en el infinito; en general, la curva

$$y = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}$$

tiene un contacto de orden $n + 1$ con la curva dada. Se comprende, pues, que tomando n suficientemente grande, dé la suma $S_n(x)$ un valor muy aproximado de $f(x)$, sobre todo para valores grandes de x.

Poincaré ha estudiado muy profundamente el cálculo con series asintóticas. De sus investigaciones resulta que se pueden sumar, restar y multiplicar dos series asintóticas, obteniéndose una serie que representa asintóticamente a la función suma, diferencia o producto; se pueden dividir si para la serie que figura como denominador es $c_0 \neq 0$; finalmente, es legítima la integración de toda serie asintótica; pero no sucede lo propio con la diferenciación.

Ya que no podamos entrar en las preciosas aplicaciones logradas por Poincaré *(Acta Math.*, t. 8) para la integración de las ecuaciones diferenciales, indiquemos siquiera otras aplicaciones de índole más elemental, especialmente las relativas al cálculo numérico de las funciones (1).

(1) Para el cálculo numérico con series *convergentes*, estúdiese el interesante libro de RUNGE: *Theorie und Praxis der Reihen*. 2.ª ed. (En prensa.)



Aplicación al cálculo de funciones.

La serie (A), obtenida por el proceso de Stieltjes-Poincaré, suele ser divergente. Así acontece, por ejemplo, con la función *logaritmo integral:* $\mathrm{li}(e^x)$ (1), la cual da origen a la serie

$$e^x\left(\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\frac{3!}{x^4}+\cdots\right),$$

que es divergente para todo valor de x; y, sin embargo—aquí viene el hecho sorprendente—, da *mejor aproximación* que la serie convergente en que se desarrolla $li(e^x)$.

He aquí la explicación de la paradoja. Si llamamos $S_n(x)$ a la suma de los n primeros términos y $R_n(x)$ a la diferencia:

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x),$$

esta función complementaria $R_n(x)$ comienza siendo positiva; pero al crecer n, pasa a negativa y su valor absoluto crece indefinidamente con n, puesto que el minuendo $f(x)$ tiende al valor finito c_0, mientras $S_n(x)$ crece ilimitadamente. Por tanto, habrá un valor de n, el más cercano al cambio de signo, en que $R_n(x)$ alcanzará su valor mínimo. Obtenemos así la suma $S_n(x)$ más próxima a $f(x)$.

(1) Se llama así a la función definida de este modo:

$$\mathrm{li}(x) = \int_1^x \frac{dx}{\log x}.$$



Recordemos, asimismo, la famosa serie de Stirling:

$$\log \Gamma(x+1) = \log \sqrt{2\pi} - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x +$$

$$+ \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_3}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \dots$$

(en la que B_1, B_3, ... son los números de Bernoulli), serie divergente para todo valor de x (1), que da, sin embargo, la mejor aproximación posible de $\Gamma(n+1) = n!$, y que al crecer n, conduce a la conocida y utilísima fórmula de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Cesàro. Interesantísima es la teoría iniciada por Cesàro, quien se plantea la cuestión siguiente: Puesto que el producto de dos series convergentes es, a veces, una serie divergente, ¿no será posible generalizar el concepto de suma, de tal modo que, aplicado a las series convergentes, resulte el mismo número de la definición ordinaria, y que aplicado a la serie diver-

(1) Recientemente ha dado Hadamard (Cong. de Cambridge, 1913, t. 1, pág. 303) una expresión complementaria de cada término, que hace convergente a la serie.



gente, producto de dos convergentes, resulte el mismo producto de ambas?

Dada una serie divergente

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots,$$

llamemos $s_1, s_2, s_3, \cdots$ a las sumas de los $1, 2, 3, \cdots$ primeros términos, respectivamente, y formemos

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n}{n}.$$

Si esta expresión tiene un límite S, lo llamaremos *suma* de la serie divergente. En virtud de un conocido teorema, si la serie es convergente, este límite existe y coincide con el valor de la serie; luego esta nueva definición de suma es una generalización legítima.

Cesàro llama series *simplemente indeterminadas* a las divergentes que admiten esta suma así definida; y demuestra que toda serie resultado de multiplicar dos convergentes, si no es convergente, es simplemente indeterminada, siendo su suma el producto de las sumas de aquéllas. He aquí cómo una propiedad de valor exclusivamente negativo, la *no convergencia* de la serie producto, se transforma en una de importancia teórica y práctica.

Después de éstas, considera Cesàro las series *doblemente, triplemente... indeterminadas;* pero



ni esta generalización, ni la teoría de las series sumables de Borel, ni las interesantes investigaciones de Mittag-Leffler relativas a las series divergentes complejas, podemos exponer; ni insistiremos tampoco en las relaciones de esta teoría con la de ecuaciones diferenciales, con la prolongación analítica, etc. Basten estas indicaciones para despertar interés sobre esta rama apenas conocida de la teoría moderna de series [1].

(1) BOREL, loc. cit.



Se estudian matemáticamente los fenómenos naturales, abstrayendo multitud de causas y limitándonos a considerar las predominantes. Pero, en realidad, no son estos fenómenos, como pudiera creerse, funciones de una o dos variables, sino de un número muy considerable de ellas, y con frecuencia de infinitas variables independientes o dependientes. La teoría matemática de los fenómenos físicos, químicos, etc., constituía solamente una primera aproximación, y por esto, los resultados teóricos solían diferir considerablemente de los experimentales.

Dado el primer paso—que siempre es el más difícil—y animada por los brillantes éxitos conseguidos, la Matemática, que a pesar de la autonomía lograda en el siglo XIX emancipándose de las Ciencias naturales, no desdeña el contacto con éstas, antes bien, de sus aplicaciones se preocupa, y en ellas inspira con frecuencia sus generalizaciones, aspira a lograr más grande exactitud y a extender su campo de influencia, intentando servir a todas las Ciencias en que interviene la cantidad.

Propósito tan ambicioso exige una ampliación de sus recursos, abordando resueltamente el estudio de las funciones de infinitas variables; y esta generalización puede hacerse en dos direcciones, según se considere un *conjunto numerable de variables,* o un *conjunto continuo.*



Funciones de líneas.

¿Qué es una función?, decíamos en la conferencia anterior. Es un número variable que depende de otro número variable. Por ejemplo, el área de un círculo depende exclusivamente del radio; fijado éste, tenemos inmediatamente aquélla. Pero ¿y el área de un recinto cualquiera? También ésta depende del contorno; mas no de su longitud, no del perímetro, sino de la forma total de esta curva; demos el contorno completo, y tenemos el área.

Ahora bien, *dar una curva* es dar *todos sus puntos,* cada uno de los cuales puede venir determinado por un par de números (sus coordenadas); luego el área buscada depende de estos infinitos números, es una función de *infinitas variables.* De otro modo: la curva puede venir dada por su ecuación $\varphi(x, y) = 0$, o bien $y = f(x)$; pero ésta equivale a infinitos datos; pues dar una función $f(x)$ arbitraria, es dar los infinitos valores de y correspondientes a los infinitos valores de x de un cierto intervalo.

En oposición al concepto «función de una o varias variables», o sea *función de puntos*, llegamos al concepto *función de línea,* esto es, número variable que depende, no de un número ni de varios números, sino de un *Continuo* de números, esto es, de toda una función. Y no se confunda esto con la elementalísima noción clásica *función de función*, que nada de común tiene con ésta.

Un ejemplo físico: Dado un disco metálico, para hallar la temperatura estacionaria en un punto interior, basta conocer la temperatura en el contor-



no; mas no en uno ni en varios puntos, sino en *todo el contorno*. He aquí, pues, un número que depende de los valores de una función en todo un continuo de puntos, esto es, otra función de línea.

Una función de línea en el intervalo (a, b) se designa así: $F \left| \left[\varphi \overset{b}{\underset{a}{}} (x) \right] \right|$, y, en general, una función de n líneas:

$$F \left| \left[\varphi_1 \overset{b_1}{\underset{a_1}{}} (x), \ \varphi_2 \overset{b_2}{\underset{a_2}{}} (x), \ \cdots\cdots \ \varphi_n \overset{b_n}{\underset{a_n}{}} (x) \right] \right|.$$

Ampliación del Análisis. Todo el Análisis ordinario puede generalizarse haciéndolo aplicable a las funciones de líneas; esta es la idea directriz que ha permitido a Volterra organizar esta teoría, desde sus primeros trabajos en 1887, hasta su tratado reciente (1).

Deformemos la curva o función que hace de variable independiente, y obtenemos un incremento de la función de línea. Dividido éste por el de aquélla (hallado por medio del Cálculo de variaciones), obtenemos un cociente cuyo límite es una generalización de la derivada ordinaria.

Fijémonos en otra cuestión capital del Análisis: el desarrollo en fórmula de Taylor. Cuando se trata de varias variables independientes apare-

(1) VOLTERRA: *Leçons sur les fonctions de lignes*.—Paris, 1913.



cen como coeficientes sumas simples, dobles, triples..., compuestas por las derivadas parciales. Aquí aparecen integrales simples y múltiples, en las que entran las derivadas de la función de línea.

Recordemos que la teoría de las formas algebraicas se reduce, en esencia, al estudio de los términos que aparecen como coeficientes de la fórmula de Taylor (los cuales reciben nombres diversos, según el modo de obtención: *formas polares*, *emanantes*, etc.). El problema análogo será aquí el estudio de estas integrales múltiples y de sus combinaciones diversas. Nueva Algebra de campo inmenso, todavía no roturado.

No podemos enumerar aquí, como en otras teorías modernas, los problemas actuales todavía no resueltos. En este Hiperanálisis todo está por hacer, y los problemas surgen por doquiera a centenares. Fijaos en cualquier cuestión de Algebra o Análisis ordinario, y plantead la cuestión análoga en este nuevo Análisis; ya tenéis un problema.

Más todavía. Pensad en que el número de funciones de que depende una función de líneas puede hacerse infinito, y esto de dos modos: numerable o continuo; tened, además, en cuenta, que estas funciones independientes pueden serlo de varias variables, y aun de infinitas; esto es, funciones de una sucesión numerable de variables, o funciones de líneas; considerad, por último, que este proceso generalizador puede proseguirse indefinidamente, y habréis apenas vis-



lumbrado la extensión de esta Hipermatemática, cuyos confines no podemos siquiera adivinar. Edificio gigante, cuya construcción parece hoy imposible, en el cual quedaría incluído todo el Análisis actual como primer piso de una serie indeterminable.



Los precursores. Partiendo de los sistemas de ecuaciones lineales, y aplicándoles el proceso del paso al límite en sus dos formas, obtenemos dos disciplinas que han llegado a cosechar ya resultados importantes: la *Teoría de los sistemas de infinitas ecuaciones lineales* y la *Teoría de las ecuaciones integrales.*

Pasemos de las n ecuaciones con n incógnitas, a la sucesión indefinida numerable de incógnitas y de ecuaciones; los polinomios se convierten en series, y obtenemos el sistema siguiente:

$$
\begin{aligned}
0 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n + \cdots \\
0 &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

¿Existe un conjunto de valores de $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ $x_n, \ldots$ que satisfagan al sistema? La contestación dista mucho de ser inmediata.

Este problema no se ha planteado caprichosamente. Se presenta de modo natural al aplicar el método clásico de los coeficientes indeterminados a la integración de ecuaciones diferenciales. Llamando $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ a los coeficientes desconocidos del desarrollo en serie de la función buscada, e imponiendo a ésta la condición de que satisfaga a la ecuación diferencial, al identificar



ambos miembros obtenemos un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas.

Ciertamente, los sistemas que solían presentarse al aplicar este método, eran muy sencillos, pues las incógnitas aparecían sucesivamente, y no todas en cada ecuación. Como siempre sucede, la resolución de estos sistemas particulares es muy anterior a la creación de la teoría general, la cual tiene en ellos sus precursores.

La resolución exacta e ingeniosa dada por Fourier a un sistema que se le presenta en su Teoría del calor, aplicando un método general de gran trascendencia, que puede llamarse el *principio de las reducidas;* el método seguido por Fürsteneau para calcular la raíz mínima de una ecuación algebraica, que transforma en un sistema de infinitas ecuaciones lineales; los sistemas especiales resueltos por Kötteritzsch, y recientemente vueltos a estudiar con todo rigor por v. Koch (1); el desarrollo de algunas funciones elípticas en serie de Fourier por medio de los coeficientes indeterminados, hecho por Appell, son los principales trabajos precursores de la teoría.

Trabajos imperfectos todos, sometidos por Poincaré a justa crítica, de la cual surge imperiosa la necesidad de organizar estas ideas dispersas, constituyéndolas en sistema que satisfaga a todas las exigencias del rigor.

(1) V. Koch: *On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations.*—Cong. de Cambridge, 1913; t. 1; p. 352.



Poincaré y Hilbert. La teoría de los sistemas generales de ecuaciones de primer grado con infinitas incógnitas, ha nacido en 1906, y su verdadero creador es Hilbert [1]; pero nada o muy poco habría podido avanzar de no haber dispuesto de un recurso poderoso que otro hombre genial había preparado años antes. Nos referimos a Poincaré y a la *teoría de los determinantes infinitos*. Esta teoría se ha popularizado en estos últimos años con motivo del rápido éxito de las ecuaciones integrales.

Consideremos un cuadro o matriz de infinitas filas e infinitas columnas, y formemos los determinantes principales de órdenes 2, 3, 4, ..., n, ... Si estos números tienen un límite A, éste se llama valor del determinante infinito, y escribiremos:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \cdots\cdots \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

La resolución general de los sistemas de infinitas ecuaciones por medio de determinantes infini-

(1) Véanse sus memorias fundamentales sobre las ecuaciones integrales, reimpresas en un volumen (Leipzig, 1912), así como su reseña: *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variabeln*. Rend. Palermo, 1909; t. 27; pág. 59.



tos, ha sido lograda por Hilbert mediante la *ortogonalización* previa del sistema. Recordemos que en Geometría analítica la condición de perpendicularidad de dos vectores (u, v, w) y (u', v', w'), es: $uu' + vv' + ww' = 0$. Pues bien: si interpretamos el sistema en un espacio de infinitas dimensiones, el conjunto de coeficientes de cada ecuación representa un vector que tiene éstos por componentes, y la resolución del sistema se reduce a este problema geométrico: hallar los vectores que son ortogonales al sistema de los infinitos vectores dados. Este es el método seguido por Schmidt, discípulo de Hilbert, y cofundador de la teoría.

Pero el tiempo apremia y no podemos detenernos más en ella, ni entrar siquiera en la teoría de las sustituciones lineales de infinitas variables, ni en las de las formas cuadráticas, de infinitas variables, etc. En general: todo capítulo del Algebra lineal o cuadrática da origen a una rama de este frondoso árbol [1].

(1) Los resultados más importantes obtenidos pueden verse en la Memoria: V. Koch: *Sur les systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*. Cong. de Stockholm, 1909, pág. 43; o en el tratado más reciente de Riesz: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*.—Paris, 1913.

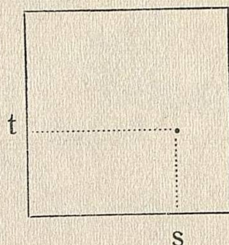


Paso al límite.

Volvamos al sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, y para abreviar representemos sus términos por un cuadro de puntos. En cada uno suponemos colocado un coeficiente a_{ij}; los de cada columna están multiplicados por una misma incógnita x_1 o $x_2, \cdots$ o x_n; a cada fila corresponde un término independiente k_i.

Hagamos crecer indefinidamente el número de ecuaciones y el de incógnitas, pero efectuemos el paso al infinito *continuo* y no al infinito *numerable* como antes. Consideramos, pues, en vez de los puntos de la red, todos los del cuadrado, y a cada uno le asignamos un número; es decir,





damos una función K (s, t) de las coordenadas, definida en los intervalos: $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$. Esta función sustituye, pues, al conjunto de infinitos coeficientes en infinitas ecuaciones.



En vez de dar como antes una sucesión numerable de incógnitas $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$, daremos una sucesión continua, es decir, a cada punto del lado horizontal asignaremos un número desconocido, o sea una función incógnita: $f(s)$. Cada término $a_{ij} x_j$ viene, así, sustituído por el producto $K(s, t) f(s)$, y la suma que compone el primer miembro de la ecuación será:

$$\int_a^b K(s, t) f(s) ds.$$

En vez de dar, como antes, la sucesión discreta $k_1, k_2, \cdots\cdots k_n, \cdots\cdots$ de términos conocidos, fijaremos uno en cada punto del lado vertical, o lo que es lo mismo, daremos una función $\varphi(t)$. Tenemos, en definitiva, como límite del sistema lineal, la ecuación única siguiente:

$$\int_a^b K(s, t) f(s) ds = \varphi(t).$$

Esta es la *ecuación integral lineal de primera especie*. $K(s, t)$ es una función conocida llamada *núcleo;* $\varphi(t)$ es otra función conocida, y $f(s)$ es la función incógnita.

Análogamente se llega a la ecuación de segunda especie:

$$\int_a^b K(s, t) f(s) ds + f(t) = \varphi(t), \qquad (A)$$

donde la función incógnita figura también fuera del signo integral.



Estas son las dos ecuaciones de Fredholm. Si suponemos variables los límites de integración, obtenemos las ecuaciones integrales de Volterra:

1.ª especie: $\int_a^s K(s,t)\, f(s)\, ds = \varphi(t)$

2.ª » $\int_a^s K(s,t)\, f(s)\, ds + f(t) = \varphi(t).$

Teoría de Fredholm. Reseñaremos muy rápidamente los resultados fundamentales de Fredholm, el cual se ocupa casi exclusivamente de la ecuación de segunda especie (A), que es la más interesante. Así como en los sistemas de ecuaciones lineales se facilita el estudio considerando al mismo tiempo el sistema homogéneo, obtenido igualando a 0 los términos independientes, hace Fredholm el estudio comparativo de la ecuación (A) y de esta otra homogénea, también de segunda especie:

$$\int_a^b K(s,t)\, f(s)\, ds + f(t) = 0. \qquad (A')$$

Las conclusiones son muy análogas a las del Algebra de los sistemas lineales:

1.ª O tiene (A) solución, cualquiera que sea $\varphi(t)$, o admite (A′) al menos una solución no idénticamente nula.

2.ª La ecuación homogénea (A′) tiene, a lo sumo, un número infinito de soluciones linealmente independientes, y de ellas se deducen todas las



demás, combinándolas linealmente en la forma

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m .$$

3.ª Si la ecuación (A) admite solución, cualquiera que sea $\varphi(t)$, esta solución es única.

4.ª En caso contrario, la condición para que (A) tenga solución es del tipo

$$\int_b^a \varphi(t)\, \psi(t)\, dt = 0,$$

y se obtienen todas las soluciones sumando las de (A′) a una cualquiera de (A).

Fredholm sigue método análogo al del Algebra, utilizando determinantes funcionales cuyos elementos son los valores del núcleo; algoritmo que resulta de los determinantes ordinarios, aplicando el paso al límite en su segunda forma, así como antes lo aplicábamos en la primera.

Teoría de Hilbert. Hilbert y su discípulo Schmidt han estudiado, sobre todo, el caso del núcleo simétrico $K(s, t) = K(t, s)$, que es el más importante para la teoría de los desarrollos en serie y para los problemas de contorno. Procediendo por analogía, de igual modo que se hace en Analítica al tratar el problema de los tres ejes, introducen sistemáticamente un parametro λ, escribiendo el núcleo en la forma $K(s,t) = \lambda k(s,t)$, y el estudio de los valores de λ que hacen resolu-



ble la ecuación (A′) (Eigenwerte) y las soluciones correspondientes f_1 (s), f_2 (s) ..... (Eigenfunktionen), constituyen el fundamento de su método.

No podemos detenernos más en este punto; remitiremos al lector a la bibliografía donde rápidamente puede orientarse (1), y terminaremos citando siquiera las más importantes aplicaciones de la nueva teoría.

Aplicaciones de las ecuaciones integrales.

La resolución del famoso problema de Dirichlet, fundamental en la teoría del potencial logarítmico, esto es, la integración de la ecuación de Laplace $\Delta u = o$, cuestión central en la Física matemática y en la Teoría de funciones analíticas, que ha preocupado largo tiempo a los analistas (2), hasta que Schwarz y Neumann dieron al fin la primera solución rigurosa; la reso-

(1) Citaremos solamente tratados y no memorias; la bibliografía completa puede verse en el libro de Lalesco o en HAHN: *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen.*—Leipzig, 1910.

BÔCHER: *An introduction to theory of integral equations.* Cambridge, 1909.

KNESER: *Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der Mathematischen Physik.*—Leipzig, 1911.

HILBERT: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.*—Leipzig, 1912.

LALESCO: *Sur les équation intégrales.*—París, 1912.

VOLTERRA: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles.*—Paris, 1913.

(2) Sobre este punto puede estudiarse: ADHÉMAR.—



lución dada por Hilbert del también famoso problema de Riemann en la teoría de ecuaciones diferenciales con coeficientes complejos variables; la aplicación bellísima de la teoría de Hilbert a los problemas de la cuerda y de la membrana vibrantes; los estudios de Volterra sobre la oscilación de los líquidos (1); el desarrollo de las funciones en serie de funciones ortogonales, resultado importantísimo de Hilbert que comprende, como casos particulares, el de Fourier y todos los posteriores; la obtención lograda por Hilbert de los resultados más importantes que constituyen la teoría de las áreas y volúmenes de figuras curvas, creada por Minkowski, son ejemplos bastantes para probar la eficacia de este nuevo algoritmo, ya incorporado definitivamente a la Matemática.

Terminada ya la primera fase de su desarrollo, época de febril creación y de descubrimientos sorprendentes, la teoría de las ecuaciones integrales ha entrado en la fase de su normal y progresivo desenvolvimiento.

Los espíritus ingenuos que, deslumbrados por los primeros éxitos brillantes, llegaron a creer que la nueva disciplina había de hacer innecesarias las ecuaciones diferenciales y la representación con-

L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et Neumann.—Paris, 1909.

(1) Para las aplicaciones a la Física matemática véase: HEYWOOD-FRÉCHET, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique.*—Paris, 1912.—KORN, *Über freie und erzwungene Schwingungen.*—Leipzig, 1910.



forme, han podido convencerse ya de que la Matemática es demasiado extensa y sus problemas demasiado complejos y diversos, para que toda ella quede encerrada en un marco, por amplio que éste sea; y con la creación de las nuevas teorías de las ecuaciones integro-diferenciales y en derivadas funcionales, de que luego trataremos, se comprueba, una vez más, que en la Matemática la serie de generalizaciones sucesivas nunca tendrá fin (1).

Mecánica y Física hereditarias.

Durante todo el siglo XIX han sido las ecuaciones diferenciales el único recurso de que disponía la Física matemática. Se admitía como verdad inconcusa que cada acción sólo se manifiesta en el momento en que obra; y que acciones iguales, obrando sobre el mismo cuerpo, producen efectos iguales. Admitido esto, las ecuaciones diferenciales, que sólo ligan el momento actual del sistema con los infinitamente próximos, se adaptaban perfectamente al planteo y resolución de los problemas.

¿Pero es así como acontecen los fenómenos físicos? Si aspiramos a exactitud mayor que la de una primera aproximación, no puede esto admi-

(1) El profesor Runge, de Götingen, se ha ocupado de la integración *práctica* de las ecuaciones integrales, llegando a resultados muy notables para tipos de ecuaciones frecuentes en Física matemática. Véase, por ejemplo, su interesante memoria en *Math. Ann.*, t. 75, 1914.



tirse. Tomemos una varilla metálica sujeta por un extremo, y carguemos pesos diversos, cada vez mayores, en el otro, anotando la desviación en cada caso. Si después vamos disminuyendo las cargas, recorriendo inversamente la misma escala de pesos, observamos que las nuevas desviaciones son distintas de las anteriores. ¿Qué interpretación cabe dar a este hecho? Sólo una, a saber: que la deformación de una varilla no depende sólo del peso que actúa sobre ella, sino también de los pesos que anteriormente han obrado. Es decir: el sistema molecular *conserva la memoria del pasado*.

Picard ha dividido la Mecánica en dos partes: Mecánica *no hereditaria* y Mecánica *hereditaria* [1]; clasificación análoga se ha iniciado en la Física matemática. La Mecánica y la Física clásicas partían del principio de que toda acción sólo se manifiesta en el momento en que obra; quedan, pues, incluídas, a modo de capítulo preliminar, en esta Física y Mecánica hereditarias, en las que se tiene en cuenta la *acción hereditaria* de toda causa; estudio preliminar que puede considerarse como una primera aproximación, en la que esta acción hereditaria se deprecia.

No podemos entrar a discutir el valor científico que esta clasificación tenga, ni siquiera citaremos las objeciones [2] de que ha sido objeto esta concep-

(1) *La Mécanique clasique et ses approximations successives.*—Riv. di Scienza, t. I; 1907.

(2) Véase, por ejemplo, Painlevé: *Les Méthodes dans les sciences.*—Ser. I.—Paris, 1911.



ción de las acciones hereditarias. Sólo os diré que, admitida ésta, las ecuaciones integrales constituyen un recurso analítico mucho más eficaz para su estudio que las ecuaciones diferenciales, pues en ellas no queda relacionado solamente cada momento con los infinitamente próximos, sino que ligan *todos* los estados del sistema en el intervalo considerado.

Ecuaciones integro-diferenciales.

Pero este algoritmo de las ecuaciones integrales se hace pronto insuficiente; y de la necesidad de poder abordar matemáticamente tales problemas, ha surgido una generalización más amplia: la teoría de las *ecuaciones integro-diferenciales*, que ligan las funciones desconocidas con sus integrales y sus derivadas (1).

La preciosa aplicación hecha por Volterra a los problemas de elasticidad y, en especial, al de la esfera elástica isótropa; el cálculo de los coeficientes de herencia en la torsión de un hilo; el estudio de la viscosidad hecho por Voigt; la aplicación al estudio de las vibraciones transversales de una barra elástica, llegándose a resultados comprobados experimentalmente por Webster y Porter; finalmente, multitud de conclusiones de carácter práctico, que pudieran tener trascendencia indus-

(1) Véanse los tratados de Volterra, ya citados, y además: LEVY: *Sur les équations intégro-différentielles.*—Paris, 1911.



trial, como, por ejemplo, la determinación de la materia que disipa menor cantidad de energía acústica, y la medida de la *memoria de las substancias,* son éxitos más que suficientes para concluir que la teoría de las ecuaciones integro-diferenciales constituye por hoy el instrumento analítico más adecuado de que disponen la Mecánica y la Física hereditarias [1].

(1) La teoría hasta hoy construída de las ecuaciones integro-diferenciales, puede estudiarse en los tratados de Volterra antes citados.—Véase, además: PICARD, *La Mathématique dans ses rapports avec la Physique.*—Cong. de Roma, 1909; t. I, página 183.



CONFERENCIA QUINTA

Funciones de variable compleja

Es tan amplio el tema de esta conferencia, son tan numerosos y tan importantes los resultados obtenidos en esta teoría, predilecta de los matemáticos durante todo el siglo XIX, que sólo de las líneas generales de su desarrollo habremos de ocuparnos en tan breve espacio, y solamente de aquellos problemas fundamentales de la teoría, que lo son también en el conjunto de la Matemática.

Necesidad de esta teoría

Pero, antes de entrar en su exposición, es preciso justificar ante mis oyentes la *necesidad* de esta teoría, que no es solamente hija de la tendencia generalizadora, que preside siempre la Matemática, sino que ha sido creada por una urgente ansia de siste-



matización en esta ciencia, y por exigencias de las disciplinas afines.

La teoría de lo imaginario ha nacido, sobre todo, para simplificar la Matemática del mundo real. Pocos ejemplos son necesarios para convencerse de esta afirmación.

Ya en la Aritmética, al tratar de la extracción de raíces, desaparece toda la simetría, que en las anteriores operaciones daba a esta ciencia su sencilla y armónica belleza. Los números negativos dejan de tener raíces de índice par, y, en cambio, tienen dos los positivos. Apelamos entonces a los números imaginarios, y quedan recuperadas la sencillez y armonía perdidas.

El desarrollo del Algebra es imperfecto y asimétrico hasta que se llega al teorema fundamental; desde entonces, admitidas raíces reales e imaginarias indistintamente, se hace innecesaria toda restricción, y las proposiciones algebraicas adquieren generalidad amplísima.

Pasemos a la teoría de funciones de variable real, y fijémonos, por ejemplo, en la función sencillísima siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

la cual está definida para todo valor real de x, sea positivo o negativo. Ningún valor particular de la variable desempeña papel especial. La gráfica representante en el plano cartesiano es una curva perfectamente regular, que se extiende simétrica-



mente a uno y otro lado del eje y, desde $-\infty$ a $+\infty$. Desarrollémosla en serie por división, y obtenemos:

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

serie convergente en el intervalo $-1 < x < 1$. Sólo en este restringido campo tiene significado el segundo miembro, y sólo en él coincide con el primero.

¿De dónde procede esta limitación? ¿Cómo el campo de convergencia se reduce a un segmento, al parecer arbitrario, sin que los extremos $+1$ y -1, que lo limitan, tengan relación especial ninguna con la función?

Demos ahora a x valores complejos, y consideremos la función

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{1+z^2}$$

donde z representa un número cualquiera real o imaginario, es decir, un punto cualquiera del plano de Gauss. La función deja de ser regular en todo el campo; ahora aparecen dos puntos singulares: $z = \sqrt{-1}$ y $z = -\sqrt{-1}$, que hacen infinita a la función; puntos situados sobre el eje en que se miden los números imaginarios a uno y otro lado del origen, y a distancia 1.

Ahora bien: el campo de convergencia de una serie de potencias es siempre un círculo que llega



hasta el punto singular más próximo al origen; luego, en este caso, el círculo de convergencia de la serie

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$$

el cual limita el máximo círculo en que la función es regular, debe tener precisamente el radio 1, y este círculo determina sobre el eje real x el intervalo $-1 < x < 1$.

He aquí explicada la aparición misteriosa de este segmento, que, si no tiene relación ninguna especial con la función (A), sí la tiene, y muy íntima, con la función (B), en que aquélla está incluída. Es que las singularidades de la función compleja (B), aunque estén situadas fuera del eje real, repercuten sobre este eje real. Y véase en este sencillo ejemplo cómo es precisa la ampliación al campo complejo de las variables reales para hacer un estudio completo de las propiedades de ésta, que de otro modo serán inexplicables [1].

(1) Siendo la teoría moderna de las funciones de variable compleja una de las que más urgentemente demandan su introducción en España, salve el lector estudioso tan grave deficiencia, emprendiendo por su cuenta este aprendizaje:

VIVANTI: *Teoria delle funzioni analitiche.*—Milano, 1901 (Teoría elemental de Weierstrass).—BURKHARDT: *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen.*—4.ª ed. Leipzig, 1912 (Teoría elemental de Riemann).—BIANCHI: *Lezioni sulla Teoria delle funzioni di variabili complessa e delle funzioni ellitische.*—2.ª ed. Pisa, 1916 (Método de Cauchy-Riemann).—OSGOOD: *Lehrbuch der Funktionentheorie.*—2.ª ed., t. 1.º—Leipzig, 1912 (Tratado completo que contiene los resultados fundamentales de los tres métodos).



Definición. El fundador de la Teoría general de funciones de variable compleja es Cauchy; pero su definición, aunque muy amplia en apariencia, es en realidad muy restringida. Para Cauchy, y para algunos de sus continuadores, una función $w = f(z)$ no es otra cosa que una correspondencia entre las dos variables z y w, expresable por los *símbolos del Análisis*. Pero ya vimos en la conferencia tercera que el significado concreto de esta vaga locución no es otro, en resumen, que el de combinación aritmética, más o menos complicada, de las funciones elementales:

$$z^n, \quad a^z, \quad \log z, \quad \text{sen } z, \quad \cos z, \quad \text{arc sen } z, \ldots$$

Ya en las conferencias anteriores hemos podido apreciar las imperfecciones de esta noción tan restringida. Allí vimos que una misma función puede tener expresiones analíticas muy distintas, y esta diversidad se acentúa al llegar a las funciones de variable compleja. ¿Quién podría adivinar que las dos expresiones

$$\frac{1}{2i} \log \frac{1 + i z}{1 - i z} \quad \text{y} \quad \text{arc tg } z$$

representan la misma función?



Expresión que representa dos funciones.

Pero hay algo más sorprendente: una sola expresión analítica puede representar dos funciones distintas.

Consideremos la serie

$$w = 2 + (z^2 - 1) - \frac{1}{4}(z^2 - 1)^2 + $$
$$+ \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6}(z^2 - 1)^3 - \ldots$$

la cual es convergente en el campo $| z^2 - 1 | < 1$. Este conjunto de puntos que cumplen tal condición, está formado por dos óvalos de Cassini a uno y otro lado del eje y, con focos $+ 1$ y $- 1$. En el de la derecha, la serie coincide con la función $2z$; y en el de la izquierda, con la función $- 2z$. Una misma expresión nos define dos funciones totalmente distintas. Recíprocamente, desarróllense estas dos funciones, según las potencias de $z^2 - 1$, y obtenemos la misma serie.

El lector puede comprobar muy fácilmente esto en los focos, pues al valor $z = 1$ corresponde $w = 2$, esto es, el *duplo* de la variable; mientras al valor $z = - 1$, corresponde $w = 2$, es decir, *menos el duplo* de la variable.

Más adelante veremos que esta cuestión está íntimamente relacionada con el desarrollo en serie de polinomios, rama importantísima en la que hay no pocos problemas por resolver.



Necesidad de una definición rigurosa.

¿Qué se deduce de tales ejemplos? La insuficiencia de la representación analítica para servir de base a una definición rigurosa del concepto *función de variable compleja*. Tal representación analítica viene a ser como el ropaje de la función; esto es, como algo accesorio y variable a voluntad, que no puede servir en modo alguno para la determinación de las funciones, y mucho menos para su definición.

Aparece, pues, bien clara la necesidad de una definición *intrínseca;* y podemos establecer la conclusión, aunque muchos no la admitan sin sorpresa, que Cauchy, fundador de la teoría, manejaba las funciones de variable compleja, y las manejaba genialmente, sin haber llegado a poseer un concepto claro que correspondiera a esta palabra; de igual modo que Euler y Laplace manejaban las series, y de ellas deducían conclusiones admirables, sin tener clara noción de la convergencia.

Nada de esto sorprenderá a quien conozca la marcha normal de la Ciencia; en estos hombres geniales, la intuición suple el atraso de las teorías, y lo que no saben, lo adivinan.

Obra subsistente de Cauchy.

No quiere esto decir que la teoría de Cauchy haya sido completamente derogada. Quedan de ella, y serán eternamente clásicos, algunos resultados capitales, entre los cuales es el más importante *la integral de Cauchy:*



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)\,dt}{t - z}$$

que define completamente la función en todo punto interior de un área simplemente conexa, conocidos sus valores en el contorno.

Subsistirá también el desarrollo de la función en serie de Taylor, que Cauchy demuestra por medio de su integral; y también será siempre utilizado, con las modificaciones exigidas por el progreso de la teoría, su famoso Cálculo de residuos.

Puede caracterizarse el método de Cauchy como aplicación sistemática de la integración a lo largo de curvas; por este procedimiento llega a todos sus resultados importantes.

Pero en aquel entonces no se poseía aún con claridad una idea que comprendiera a esta palabra *curva,* y estaban los matemáticos muy lejos de sospechar la amplísima indeterminación y la enorme complejidad que este concepto encierra; por esto es forzoso introducir hoy tantas restricciones en aquellos resultados de Cauchy, que todavía tienen valor actual. Esta es una de las razones por las que la teoría ha sido en gran parte abandonada, viniendo a sustituirla el método geométrico de Riemann, o el aritmético de Weierstrass; dando paso las integrales curvilíneas al más fecundo recurso de la representación conforme, y al de la convergencia uniforme de sucesiones indefinidas, recursos poderosos ambos que Cauchy no llegó a poseer.



Prolongación analítica.

Weierstrass construye cada función por ampliaciones sucesivas. Consideremos una serie de potencias del tipo

$$(A)\quad w = a_0 + a_1 (z - a) + a_2 (z - a)^2 + \ldots$$

convergente en un cierto círculo de centro *a;* esta serie hace corresponder a cada punto del círculo un valor de *w,* y, por tanto, define una función en este círculo; pero no debemos confundir el concepto de *función* y el de *serie.* Antes hemos visto un caso en que una función $\frac{1}{1 + z^2}$ estaba definida más allá del círculo de convergencia de la serie representante; y su campo de existencia, compuesto de todo el plano, con excepción de dos únicos puntos, sólo podía cubrirse con infinitos círculos correspondientes a infinitas series. Cuando se da previamente la función, como sucedía en dicho ejemplo, es fácil obtener estos desarrollos en serie; basta desarrollar en serie de Taylor en un punto regular; desarrollar de nuevo en un punto del círculo de convergencia así obtenido, etc. Así vamos cubriendo con círculos el campo en que la función es regular, de igual modo que las tejas cubren un tejado.

Pero aquí hemos partido de esta vaga noción:



función de variable compleja, que no hemos definido todavía en general. Pues bien: este proceso de las series enteras sucesivas es el que sirve de partida para llegar a la deseada definición, en la rigurosa teoría de Weierstrass.

Partamos de una serie cualquiera del tipo (A), convergente en un cierto círculo; a ésta la llamamos *primer elemento* de la función que se trata de definir. Supongamos ahora que existe otra serie:

$$\text{(B)} \qquad b_0 + b_1 (z - b) + b_2 (z - b)^2 + \dots$$

convergente en otro círculo de centro *b*, que tiene una parte común con el anterior y que en esta región ambas series dan los mismos valores. Weierstrass dice entonces que la segunda serie es una *prolongación analítica* de la primera. Consideremos ahora todas las prolongaciones analíticas de ésta, es decir, todas las series que cumplan la anterior condición. Obtenemos así una correspondencia definida en un campo cada vez más amplio, hasta que la prolongación deja de ser posible. Esta correspondencia es la *función* completa.

Definición de Weierstrass

Hemos llegado, pues, a la definición siguiente:

Una función analítica, según Weierstrass, es la correspondencia definida por una serie entera de potencias, con todas sus prolongaciones analíticas.

Obsérvese que esta definición es puramente arit-



mética, con independencia de toda consideración geométrica. Este fué el principal fin seguido por la inmortal obra de Weierstrass: la *aritmetización* del Análisis. Sin embargo, para una exposición como la nuestra, de valor exclusivamente eurístico, ofrece el lenguaje de la Geometría ventajas que lo hacen preferible.

Convenido esto, se presentan inmediatamente dos cuestiones previas. En primer lugar, si partimos de un punto del primer círculo, ¿cuántas prolongaciones serán necesarias para llegar hasta cualquier otro punto del campo de la función? Poincaré y Volterra dieron hace tiempo la contestación definitiva: basta un número finito de prolongaciones, o una infinidad numerable.

En segundo término: si partiendo del círculo primero llegamos a un mismo punto mediante prolongaciones analíticas, siguiendo caminos diversos, el valor final para la función ¿será el mismo? Si tal sucede, la función se llamará *uniforme;* en caso contrario será multiforme o infinitiforme.

Esta cuestión está íntimamente ligada con la existencia y naturaleza de los puntos singulares, de los cuales vamos a ocuparnos.

Puntos singulares

Imaginemos que, al efectuar una sucesión de prolongaciones, nos vemos detenidos por un punto sobre el cual no podemos pasar; es decir, llegamos a un círculo en cuyo contorno hay un punto a tal, que ninguna serie ordenada, según las potencias $z-a$, sea pro-



longación de la anterior, o bien nos acercamos indefinidamente a él, sin que nunca llegue a quedar incluído en uno de los círculos, ni siquiera en su periferia.

Tal punto se llama *singular*, y si está aislado, es decir, si en un cierto entorno suyo no hay otros puntos singulares, podremos continuar las prolongaciones analíticas, no *sobre él*, sino *alrededor de él*.

La investigación de los puntos singulares es una de las cuestiones más complicadas en el método de Weierstrass, y estas dificultades aumentan en grado sumo cuando la función no es uniforme, porque entonces puede ser un punto singular en una rama de la función y regular en otras ramas.

La teoría aparece muy incompleta en este capítulo esencial. Cuando la función es uniforme, se sabe que el conjunto de puntos singulares ha de ser *cerrado*. Pero ¿es cierta la recíproca? Es decir: dado un conjunto cualquiera de esta naturaleza, ¿existe una función analítica uniforme que lo tenga como conjunto singular? Goursat y Zoretti han dado demostraciones de la contestación afirmativa; pero con restricciones que impiden considerar como resuelta esta cuestión importante [1].

Por ser bien conocido no nos detenemos en el clásico teorema de Liouville; pero citémoslo siquiera: «Una función analítica regular en todo el plano (incluso el punto del infinito) es una constante.»

(1) Véase ZORETTI: *Leçons sur le prolongement analytique*. —París, 1911, pág. 45.



Funciones multiformes

Si estas dificultades se presentan en la teoría de las funciones uniformes, compréndese que para las multiformes las cuestiones se complican extraordinariamente. He aquí una cuestión, análoga a la anterior, que se presenta de modo natural al iniciar este estudio, y, sin embargo, todavía no resuelta. ¿Puede ser cualquiera el conjunto de los puntos singulares de una función multiforme, o, por el contrario, está sometido a alguna restricción?

Zoretti ha aventurado la hipótesis de que tal conjunto singular es *la suma de una sucesión numerable de conjuntos cerrados* (1). Posteriormente, Koebe, el genial matemático alemán, de cuyos descubrimientos habremos de ocuparnos repetidamente, ha avanzado más en este sentido. Este problema está íntimamente ligado al de la existencia de una función con campo de existencia prefijado; pero ambas cuestiones no se resolverán completamente hasta que la teoría de la superficie de Riemann, de infinitas hojas, no se perfeccione.

Para las funciones multiformes no hay teorema análogo al de Liouville. En efecto, existen funciones (por ejemplo, las integrales abelianas de primera especie) desprovistas de puntos singulares.

Funciones con frontera natural.

Concretémonos ya al caso de las funciones uniformes, que son las más importantes. Hemos visto cómo se va ampliando el campo de exis-

(1) Loc. cit., pág. 51.



tencia mediante prolongaciones sucesivas. Una pregunta ocurre inmediatamente: ¿podrá proseguirse ilimitadamente esta ampliación, o habrá un límite que impida toda nueva prolongación analítica?

El matemático que primero resolvió este fundamental problema fué el insigne Schwarz, y lo hizo de modo sencillísimo, dando una función que no puede prolongarse más allá de un contorno fijo. Este es el primer ejemplo conocido de función con *frontera natural,* que ha ejercido influencia inmensa en el desarrollo de la teoría de funciones, dando origen a la rama de funciones automorfas.

Posteriormente, Poincaré y varios otros han dado ejemplos sencillos de funciones con frontera natural. Hoy es sumamente fácil proponer otras funciones que tengan esta propiedad. He aquí uno elementalísimo:

$$w(z) = z^{1!} + z^{2!} + z^{3!} + z^{4!} + \ldots$$

serie convergente para $|z| < 1$, que no admite prolongación analítica ninguna; la circunferencia de radio 1 es, por tanto, su frontera natural.

La razón es muy sencilla: es que todos los puntos de esta curva son singulares, y la prolongación analítica no puede, por tanto, efectuarse en ninguna dirección.

Pero si la función es multiforme, toda sencillez desaparece. Es preciso comenzar distinguiendo fronteras de una sola rama y fronteras de la función, etc.



Funciones con espacios lagunares

Vencida por Schwarz la primera dificultad, se presentaron en seguida ejemplos de funciones con *espacios lagunares,* en los cuales no están definidas, y sí en todo el resto del plano; basta someter a una transformación lineal una función con frontera, para obtener funciones con espacios lagunares. Sirva como ejemplo sencillísimo la misma función w (z) del párrafo anterior, de la cual deducimos esta otra:

$$z^{-1!} + z^{-2!} + z^{-3!} + z^{-4!} + \dots$$

Definida en todo el plano complejo, con excepción del círculo de radio 1, su circunferencia forma una barrera infranqueable que impide penetrar en él por prolongación analítica. Este círculo es, pues, un espacio lagunar.

No se crea, sin embargo, que la obtención de espacios lagunares no circulares es tan sencilla. Posteriormente, han dado Poincaré, Gomes Teixeira y Goursat ejemplos notables, llegando a establecer métodos generales que permiten construir funciones con espacios lagunares, arbitrariamente prefijados (1).

(1) Véase: POINCARÉ, *Acta Soc. Fenn.,* t. 12, páginas 341-350; *Amer. Journ.,* t. 14, págs. 201-221.—TEIXEIRA, *Nouv. Ann.,* ser. I, t. 6, págs. 43-45.—GOURSAT, *Bull. des sciences math.,* ser. II, t. 11, págs. 109-114; *Comp. rend.,* tomo 94, págs. 715-718.—Véase, además, su tratado de Análisis, 2.ª ed., t. 2, 1911, pág. 244.



Desarrollo válido en todo el campo.

Mediante este laboriosísimo proceso de las prolongaciones analíticas, obtenemos, al fin, todo el campo de existencia de la función; pero inmediatamente nos preguntamos: ¿No podrá darse un desarrollo en serie única, de tal naturaleza que coincida con la función en todo este campo?

Desde luego, tal desarrollo no puede ser potencial, puesto que el campo de convergencia de tales series es siempre un círculo; pero ¿y tomando como términos funciones sencillas, distintas de las potencias?

Problema complejo es éste, íntimamente ligado a la cuestión de las singularidades. Hay funciones con un punto singular único (por ejemplo, e^z, sen z,...); otras tienen varios, como acontece con las racionales y sus análogas las meromorfas; pero el caso más general es el de infinitos puntos singulares.

Así clasificadas, la contestación es sencilla: las funciones cuyos puntos singulares forman un conjunto numerable, se pueden desarrollar en serie de funciones, cada uno de cuyos términos admite uno de éstos como punto singular; si el conjunto singular no es numerable, tal desarrollo no es posible.

Caso particular, el más interesante, es aquel en que la función dada es holomorfa en todo el recinto; entonces obtenemos un desarrollo en serie de polinomios, que es uniformemente convergente dentro del recinto. Este resultado es de Runge [1].

(1) Sobre los desarrollos en serie de polinomios, con-



Funciones de campo prefijado. Resuelta de plano queda la cuestión; pero ésta sugiere otra y otras no menos fundamentales, y entre ellas el siguiente problema de Runge (1).

Bien sabemos, después del ejemplo de Schwarz, que hay funciones cuyo campo de existencia es finito, y también sabemos que este es conexo. Ahora bien; este campo *total* de existencia de la función analítica, ¿estará sometido a alguna otra restricción? De otro modo: si damos arbitrariamente un recinto, ¿existe una función que tenga éste precisamente como campo total de existencia?

La contestación de Runge es afirmativa, llegándose, en efecto, a dar una serie de funciones racionales, cuya suma define la función buscada (2).

Pero esta cuestión plantea en seguida otro problema. Vemos aquí funciones analíticas representadas por series de polinomios; pero también sabemos—y en el comienzo de esta conferencia dimos un ejemplo muy sencillo—que una serie de polino-

súltese la monografía: Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*. París, 1910.

(1) Véanse sus clásicas memorias: Runge, *Zur Theorie der analytischen Funktionen*. Acta math., t. 6; *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*. Acta Math, t. 6. Una demostración de Poincaré y otra de Goursat, son incompletas.

(2) Véase, además: Borel, *Définition et domaine d'éxistence des fonctions monogènes uniformes*.—Cong. Cambridge, t. 1, 1012, págs. 133-144.

mios puede definir simultáneamente *dos funciones distintas*. ¿Cuál será, pues, la condición necesaria y suficiente para que una serie cuyos términos son polinomios, represente una función analítica?

Se conocen varias condiciones que son *necesarias*, y otras que son *suficientes*; se sabe, por ejemplo, que es suficiente la convergencia *uniforme* de la serie, pero ésta no es necesaria desde el momento en que se conocen desarrollos no uniformes; la condición que sí es necesaria de todo punto, es la continuidad, esto es, la *cuasi-uniformidad* del desarrollo (Arzelá); pero esta no es en cambio suficiente, pues hay ejemplos de series de polinomios cuasi-uniformemente convergentes, que no representan funciones analíticas. La contestación precisa al problema no se ha logrado todavía.

Teorema de Picard.

El estudio de la función en la proximidad de sus puntos singulares, es de importancia esencial. Consideremos en primer lugar los puntos singulares aislados; cuando la función tiene límite infinito al acercarse a él la variable en cualquier dirección, se llama *polo;* cuando esto no sucede, la singularidad se llama *esencial*. La razón de considerarse los polos como puntos singulares no esenciales, es que formando la recíproca de la función, dicho punto es ordinario para ella, mientras que en los puntos esenciales la singularidad subsiste.

Weierstrass demostró que en la proximidad de un punto esencial la función se aproxima tanto



como se quiera a todo valor dado [1]. Pero quedaba una duda en pie: ¿toma efectivamente la función en dicha proximidad todos los valores? De otro modo: dado un número cualquiera a, ¿tiene solución la ecuación $f(z) = a$?

A Picard ha correspondido el honor de resolver este problema importante, que completa un punto capital de la teoría; y su solución es en alto grado sorprendente. «En el entorno de un punto singular esencial, la función toma *todos* los valores, excepto *dos* a lo sumo.» Y, si se trata de un punto singular aislado, entonces toma la función todos los valores excepto *uno* a lo sumo.

Un ejemplo elementalísimo: la función e^z, que tiene como único punto singular el del infinito, toma todos los valores, excepto uno solo: el cero.

El teorema de Picard, de fecha ya lejana (1879), es actualmente objeto de multitud de estudios que han puesto de relieve toda su trascendencia, sobre todo en la teoría de Riemann y en la representación conforme. Consúltense las recientes memorias de Carathéodory, Landau, Féjer, etc [2].

(1) Bertini ha observado (*Rend. Ist. Lomb.*, 1892) que la prioridad en esta cuestión corresponde a Casorati (1868).

(2) Sobre esta región importante de la Teoría de funciones, prepara el profesor Carathéodory, de Göttingen, un interesante libro titulado: *Der Picardsche Satz und seine Verallgemeinerungen*.—(Teubner.)



Memoria fundamental.

De intento hemos dejado para el final el método de Riemann, a pesar de ser anterior al de Weierstrass, porque posee un valor actual superior al de éste. La teoría de Weierstrass tiene más interés teórico que práctico, mientras la de Riemann satisface en igual grado al rigor lógico y a las necesidades de la Física, y en ella caben perfectamente sistematizados los resultados útiles de la teoría de Weierstrass, y todo lo subsistente de la antigua teoría de Cauchy.

No escribió Riemann miles de páginas, como Cauchy o como Gauss. Toda su labor profundamente revolucionaria en Geometría, la realizó con una sola Memoria de escaso volumen; para la creación de la moderna teoría de funciones sólo necesitó un folleto de 40 páginas; sus obras completas constituyen un tomo mucho menos voluminoso que cualquiera de nuestros libros de texto.

Dícese en Gotinga que esta Memoria doctoral famosa, en que funda la nueva teoría de funciones, le fué rechazada por el ponente; y es bien explicable que esto aconteciera, pues tal es su profundidad y su concisión, que pasaron muchos años sin que fueran comprendidas sus ideas. Aun hoy, pasado más de medio siglo, y completamente desarrollada su teoría, sigue siendo venero inagotable donde se descubren constantemente nuevos tesoros ocultos; y cada uno está revelado apenas por cuatro renglones.



Representación conforme.

Riemann procede a la inversa que Weierstrass. Sea G un recinto cualquiera, simplemente o múltiplemente conexo, y a cada punto z del mismo le hacemos corresponder uno o varios valores de w. A un incremento Δz corresponde un incremento Δw, y, si el cociente $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ tiene un límite único para cada punto z, esto es, si existe derivada única, entonces y sólo entonces, dice Riemann que w es *función* de la variable compleja z.

De esta definición se deduce inmediatamente—y en ello no nos detendremos por ser asunto muy elemental—que si dos curvas en el plano de las z forman cierto ángulo, sus homólogas forman igual ángulo; es decir, la representación efectuada por una función analítica es *conforme* (1). Vemos claramente la diferencia entre ambos métodos. Riemann pone en primer término el campo de existencia, y la condición que adopta como característica es la monogenidad. Weierstrass construye dicho campo mediante prolongaciones sucesivas. Esta definición de Riemann representa, para la teoría de funciones complejas, el momento histórico análogo al que en las funciones reales representa la definición de Riemann-Dirichlet.

La teoría moderna de funciones, edificada sobre las ideas de Riemann, ocupa actualmente una posi-

(1) La palabra *conforme* quiere decir que no altera los ángulos de las figuras, y, por tanto, las regiones infinitesimales pueden considerarse como semejantes.



ción central en la Matemática, y dentro de ella constituye su núcleo la *representación conforme*. Haremos una rápida reseña de las tres fases que presenta ésta en su desarrollo, las cuales caracterizaremos así: 1.ª, Riemann; 2.ª, Schwarz; 3.ª, Poincaré y Koebe.

Pero, antes de entrar en esta exposición, aclaremos el significado de estas dos palabras: *representación conforme*, las cuales no designan solamente una teoría final, con problemas y métodos propios, sino también un *recurso* auxiliar en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, y fundamental en la de funciones complejas; de igual modo que el Cálculo integral tiene finalidad propia, a la vez que constituye un algoritmo auxiliar en las diversas ramas del Análisis y de la Geometría.

Problema de Riemann.

He aquí el problema de Riemann: Dado un recinto simplemente conexo, ¿existe una función que lo transforme en un círculo, de modo que la correspondencia sea biunívoca, continua y conforme?

Riemann contesta afirmativamente: hay infinitas funciones que efectúan la representación conforme del recinto sobre el círculo, y cada una está determinada dando tres pares de puntos homólogos en los contornos, o bien un par solamente en el contorno, y otro par de puntos interiores.

Su demostración se apoyaba sobre este razonamiento: dada la integral doble



$$\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

consideremos todas las funciones reales posibles *u (x,y);* cada una da valor no negativo a esta integral, luego hay una, al menos, que nos dará el mínimo valor, y con esta función u_0 *(x,y)* se construye fácilmente la función compleja buscada.

En la primera mitad del siglo XIX este razonamiento habría parecido intachable; pero las exigencias del rigor matemático eran ya demasiado terminantes para que la conclusión de Riemann fuera admitida por Weierstrass y sus discípulos. Analicemos críticamente.

Consideremos todas las funciones posibles *u* (*x*,*y*), y cada una nos da un número positivo; tenemos así infinitos números. ¿Habrá entre ellos uno menor que todos los demás? Existe, sí, con toda seguridad el número que se llama *extremo* inferior del conjunto; pero este número puede no pertenecer al conjunto, y entonces no habrá función ninguna que dé a la integral este valor mínimo. Esta especie de postulado que utiliza Riemann es el llamado *principio de Dirichlet*.

En otro tiempo se hubiera dicho, a lo sumo, del razonamiento de Riemann, que era *poco riguroso;* pero después de Weierstrass no se admiten ya grados de rigor. Un teorema es *cierto* o es *falso;* una afirmación está demostrada o no está demostrada; en la Matemática actual no caben términos medios.



Schwarz

Comienza, a partir de esta grave objeción, una larguísima serie de ensayos para resolver el problema de Riemann, con todo el rigor exigido por la escuela de Weierstrass; y el primero que logra la solución completa es el genial Schwarz.

Capital es ya esta contribución, y, sin embargo, hay algo más importante en sus investigaciones; es que en ellas, al movilizar, digámoslo así, todos los recursos imaginables para asaltar la imponente fortaleza, durante tanto tiempo y con tanto brío por altas mentalidades atacada, enriquece el Análisis con métodos nuevos; y, por muy importante que sea la resolución de un problema, mil veces más trascendente para la marcha de la Ciencia es la creación de un método, que, con el tiempo, y por muchas inteligencias aplicado, permitirá resolver series y series de variados problemas.

Imposible dedicar la debida extensión a su obra, rigurosa como la de Weierstrass, profunda como la de Riemann, clara y atrayente como la de Euler. Pero citemos siquiera sus tres recursos fundamentales, cuyos nombres son bien conocidos de todo el que ha abierto cualquier tratado moderno de funciones: el *Principio de simetría* de Schwarz; el *Invariante diferencial* de Schwarz; el *Lema* de Schwarz [1].

(1) Las obras completas de Schwarz forman dos volúmenes (Berlín, 1890), en los cuales encuentran constantemente los modernos matemáticos nuevas ideas fecundas. Así, por ejemplo, el *Lema* con el que puede construirse casi toda la Teoría de funciones, ha sido encontrado por Carathéodory.



Aplicaciones de la representación conforme

Y bien—preguntarán algunos de los que me escuchan—: ¿para qué sirve este famoso problema de la representación conforme?

Voy a prescindir de sus relaciones con las demás teorías del Análisis; no trataremos de su aplicación a la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales; ni de las aplicaciones bellísimas a la teoría de la serie hipergeométrica logradas por Schwarz (1); ni pondremos ejemplos en que el teorema de Koebe sobre la deformación de los recintos (Verzerrunzssatz) simplifica las demostraciones de convergencia; ni de la elegante demostración del teorema de Picard, lograda por medio de la representación conforme de triángulos; ni nos ocuparemos de la eficaz ayuda que la teoría ha de prestar al Algebra en lo porvenir (2); ni entraremos en la interesante cuestión acerca del influjo que habrá de ejercer en la Geometría la *representación conforme proyectiva* (3). Sólo nos ocuparemos, y muy brevemente, de la resolución del problema de Dirichlet, y de la teoría de la uniformación de curvas.

(1) En su Memoria clásica resuelve del modo más riguroso y más sencillo imaginable el difícil problema de hallar las series hipergeométricas que definen funciones algebraicas.

(2) Varias aplicaciones elementales hemos expuesto en nuestra Memoria: *Aplicaciones algebraicas de la representación conforme*. Congreso de Madrid, 1913.

(3) Un ensayo en este sentido contienen nuestros *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*.—Madrid, 1916.



Problema de Dirichlet

He aquí el problema de Dirichlet: *Dado un recinto, hallar una función u (x,y) de dos variables reales, que en todo punto del mismo satisfaga a la ecuación de Laplace:*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{A}$$

y que en el contorno tenga valores prefijados.

¿Qué relación puede existir entre este problema, relativo a funciones reales, y aquel de la representación conforme, en el que se trata de una función compleja? Esta relación, y muy íntima, estriba en la propiedad que tiene la ecuación de Laplace de ser *invariante* respecto de toda representación conforme. Es decir, si $u\ (x,y)$ satisface a (A) en un recinto situado en el plano (x,y), y este recinto se transforma en otro del plano (ξ,η) por medio de una representación conforme, la función obtenida $u\ (\xi,\eta)$ satisface también a la ecuación de Laplace.

Aplicación inmediata: sabremos resolver el problema de Dirichlet para un recinto, si podemos hacerlo para otro recinto transformado conforme de aquél. Ahora bien: la solución para el círculo es inmediata, y viene dada en forma sencilla por la integral de Poisson (1); luego el problema general de Dirichlet queda reducido a saber representar cualquier recinto sobre el círculo, y éste es precisamente el problema de Riemann.

(1) Una resolución muy elemental para el círculo hemos dado en el Congreso de Valladolid (Sección 1.ª), 1915.



Aplicaciones físicas.

Convencidos ya de que el problema de Riemann resuelve el de Dirichlet, ¿qué trascendencia puede tener esta cuestión, que parece planteada por un capricho de matemáticos desocupados?

Para contestar a esta pregunta, vamos a alejarnos del Análisis. En todo problema de Física matemática hay tres partes: 1.ª Planteo matemático; es decir, traducción en ecuaciones; si el problema es de dos o más variables, éstas son ecuaciones en derivadas parciales. 2.ª Integración de estas ecuaciones; esto es, obtención de las funciones que las satisfacen y que, además, cumplen ciertas condiciones en los límites, dadas por las condiciones iniciales del problema. Dicho brevemente: tenemos un *problema de contorno* (Randtwertaufgabe). 3.ª Interpretación física de los resultados obtenidos.

Pues bien: los más importantes problemas de Electricidad, de Termología, de Elasticidad..., dan origen a ecuaciones de Laplace; esto es, se reducen al problema de Dirichlet. Pondremos algún ejemplo.

Imaginad un disco metálico cuya temperatura llega a estacionarse, es decir, se hace independiente del tiempo, y solamente es, por tanto, función de los puntos del disco. Para la determinación de ésta en el interior, basta conocer la temperatura en el contorno, porque esta es una función *armónica*, es decir, satisface a la ecuación de Laplace. El problema de las temperaturas estacionarias se resuelve, pues, con tres operaciones: 1.ª Se efectúa la



representación conforme del disco dado sobre el círculo. 2.ª Se forma para ésta la integral de Poisson. 3.ª Se trasladan al primer recinto los valores así calculados.

Equivalentes son multitud de problemas de Hidrodinámica plana (movimiento de líquidos en estanques y canales, etc.), de elasticidad (torsión de barras y vigas...); todos ellos conducen a la ecuación de Laplace, y por ende se resuelven por representación conforme.

Ved cómo durante el último tercio del siglo XIX, mientras los matemáticos españoles, hondamente preocupados con el *porqué* del imaginarismo, no han osado nunca pasar más allá de la división, otros hombres de lejanos países se ocupaban, sobre todo, del *cómo* se opera con ella, para lograr aplicaciones útiles; llegando a resultados tan reales y tangibles como todos estos relativos al disco de metal, al estanque de agua, a la barra de acero...

Poincaré y Koebe.

Llegamos a la tercera fase en el desarrollo de la teoría de la representación conforme.

La Matemática avanza siempre por ampliaciones sucesivas; una vez resuelto el problema de Riemann, se presenta de modo natural su generalización, en dos direcciones diferentes.

Del recinto simplemente conexo, pasa Schottky al múltiplemente conexo, logrando reducirlo por representación conforme a un tipo único de recintos limitados por circunferencias.



Segunda generalización: Imaginad un recinto simplemente conexo, no formado por una hoja sencilla, sino compuesto de infinitas hojas, ligadas entre sí por infinitos puntos de ramificación; ¿es posible efectuar su representación conforme sobre el círculo? Poincaré dió el año 1887, en una famosa Memoria, la solución al problema, por un método que tituló del *barrido (balayage)*, pero distaba mucho de ser rigurosa y completa. Ha sido modernamente, en 1908, cuando Poincaré y Koebe, simultáneamente, y por caminos muy distintos, han llegado a la total solución del problema.

Y ésta se presenta en forma alternativa: o el recinto es representable sobre el círculo, o sobre todo el plano, o sobre todo el plano exceptuado un solo punto. A estos tres tipos normales se reducen todos los recintos antes citados.

Koebe avanza más todavía. Imaginad que el recinto se compone de infinitas hojas, y no es simplemente conexo, ni siquiera lo es múltiplemente, sino que su orden de conexión es infinito y que no tiene una ni varias hojas, sino infinitas; y que infinito es también el número de puntos de ramificación.

A pesar de esta abrumadora complicación, Koebe ha logrado genialmente reducirlos todos por representación conforme a recintos típicos sencillos, limitados por circunferencias.

Y bien—objetaréis quizás—, ¿para qué proponerse estos problemas tan difíciles como arbitrarios? Ciertas son sus dificultades enormes, pero no hay tal arbitrariedad. El problema de la representación conforme, planteado con tan amplísimo



grado de generalidad, se presenta de modo natural al abordar otro problema, en apariencia muy sencillo: el problema de la uniformación.

Uniformación de curvas algebraicas. Considerad una curva algebraica bien sencilla; por ejemplo, la cúbica cuya ecuación en coordenadas puntuales sea:

$$x^2 = y^3.$$

La construcción por puntos es siempre algo asimétrico y multiforme; unos valores de y nos determinan dos correspondientes de x; otros, en cambio, no dan valor ninguno para x. Esta construcción de la curva es algo que difiere de la idea intuitiva que todos poseemos de la generación por el movimiento de un punto. Mucho más sencilla, y más adecuada para la investigación de sus propiedades, es la *representación paramétrica:*

$$x = t^3 \qquad y = t^2,$$

donde a la variable independiente t puede atribuirse si se quiere el significado *tiempo;* a cada instante corresponde un punto, y recíprocamente. La función algebraica *multiforme* ha sido substituída con ventaja por dos funciones *uniformes.*

¿Puede esto lograrse con toda función algebraica? Si exigimos que las dos funciones sean racionales, esto es, polinomios en t, o cocientes de po-



linomios, la uniformación de la curva algebraica dada sólo es posible cuando sea *unicursal,* es decir, cuando todos sus puntos forman una rama única finita o infinita. Pero si prescindimos de esta restricción de que las funciones uniformantes sean racionales, y sólo exigimos su uniformidad, el problema admite siempre solución. Este es el importantísimo resultado obtenido por Poincaré en época ya lejana:

Se logra uniformar toda función algebraica mediante un par de funciones automorfas.

Uniformación de curvas analíticas. Resuelto el problema para las funciones algebraicas, se planteó inmediatamente con toda su amplísima generalidad. Dada una curva analítica, es decir, una función analítica $y = f(x)$, ¿existen dos funciones uniformes

$$x = \psi(t) \qquad y = \varphi(t)$$

que representen esta función? Compréndese bien que la solución, si existe, ha de ser complicadísima. En efecto, sólo poniendo en juego todos los potentísimos recursos de la representación conforme (teorema de existencia, teoremas de deformación, etc.), ha cabido a Koebe el honor de dar cima a la atrevida empresa [1].

(1) Las numerosas memorias de Koebe se hallan esparcidas en *Götingen Nachrichten, Mathematische Annalen,*



La índole de estas conferencias nos impide entrar en este sector capitalísimo de la teoría de funciones, contiguo a otro no menos interesante, el de las funciones automorfas, cuyo problema central ha esperado la solución varios años, estando pendiente de ella la conclusión de la monumental obra de Fricke y Klein [1], hasta que al fin la ha logrado Koebe en 1911, del modo más completo y satisfactorio.

Jahresbericht y *Journal de Crelle,* desde 1908 en adelante. La bibliografía completa puede verse en una reseña que preparamos sobre esta teoría.

(1) FRICKE-KLEIN: *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen.*—Leipzig, 1897-1912.



Funciones elípticas y algebraicas.

Ya hemos advertido, al comenzar esta conferencia, que había de quedar muy incompleta nuestra exposición, por la amplitud inmensa del campo de esta teoría. Indicaremos, como complemento de la deficiente reseña, algunas direcciones en que ésta podría extenderse, partiendo de los problemas centrales, únicos de que nos hemos ocupado.

Lugar preferente, por su importancia y por su brillante historia, deben ocupar en toda exposición sistemática las *funciones elípticas* y las *funciones algebraicas;* pero ante la imposibilidad de dar una idea, ni siquiera remotamente aproximada, de su estado actual, es lo más discreto no desflorarlas siquiera.

Comprenda el lector profano cuán vano empeño sería querer entrar en estas teorías especiales, cuyo estudio exige el conocimiento completo de la teoría moderna de funciones analíticas (a la que se dedica en toda Universidad extranjera al menos dos semestres), cuando en nuestros centros superiores no suele darse ni siquiera el concepto de *función* de variable compleja; y sólo en el doctorado, al final de la carrera, cuando ya no es posible hacer aplicaciones a las demás disciplinas, se llega tímidamente a unas elementales nociones de esta teoría, eje de toda la Matemática actual.

Si esto sucede con las funciones que en los demás países han llegado al dominio elemental,



¿cuántos años pasarán hasta que lleguen a nosotros las diversas categorías especiales de funciones, de tanta importancia teórica y de tan gran valor práctico en las diversas ramas físico-matemáticas, como son, por ejemplo: las funciones esféricas, las cilíndricas, la hipergeométrica, las automorfas, las hiperelípticas y abelianas?

Hagamos votos porque esta realidad bochornosa se modifique, y que nuestros reformadores de estudios, más felizmente inspirados, subsanen pronto deficiencia tan lamentable, incluyendo en nuestros planes de estudios las teorías posteriores al año 51, fecha en que inicia Riemann una nueva era. Por nuestra parte haremos alguna indicación bibliográfica, útil a los estudiosos (1).

(1) Sobre funciones elípticas hay multitud de tratados elementales recomendables, por ejemplo:

APPELL-LACOUR: *Principes de la Théorie des fonctions élliptiques et applications.*—Paris, 1896.

Y el estudio de las funciones elípticas modulares puede hacerse en la obra clásica:

KLEIN-FRICKE: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen.*—2 t.—Leipzig, 1890-92.

La teoría de las funciones algebraicas (de la cual ni siquiera la definición ha llegado hasta nosotros) puede estudiarse en:

APPELL-GOURSAT: *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales.*— Paris, 1895.

PICARD-SIMART: *Théorie des Fonctions algébriques de deux variables indépendantes.*—2 t.—Paris, 1906.

HENSEL-LANDSBERG: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen.*—Leipzig, 1902.

STAHL: *Abriss einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.*—Leipzig, 1911.

La teoría de la superficie de Riemann, recurso funda-



Funciones enteras. Otra rama importantísima de las funciones analíticas constituyen las funciones enteras, esto es, regulares en todo el plano, excepto en el punto del infinito, y, por tanto, análogas a los polinomios en muchas propiedades. Su expresión aritmética es una serie de potencias cuyo radio de convergencia es infinito.

Habríamos de ocuparnos, en primer término, del desarrollo en prodcuto infinito, logrado por Weierstrass, gracias a la idea de los *factores primarios* exponenciales. Pasaríamos después a las investigaciones trascendentales de Laguerre, quien introduce la noción de *género* de la función, idea genial, en la que radica todo el desarrollo ulterior, y relaciona los ceros de la función y de su derivada, de modo análogo al de los polinomios. Nos ocuparíamos también de los resultados de Poinca-

mental en toda la teoría de funciones, sobre todo en las algebraicas, puede estudiarse en

KLEIN: *Riemannsche Flächen* (Autog.).—Leipzig, 1906.
WEYL: *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Leipzig, 1913.

Y sus aplicaciones a la Geometría algebraica, en nuestros ya citados *Fundamentos*.

Para las diversas categorías de funciones importantes, consúltense los libros siguientes:

VIVANTI: *Funzione poliedriche e modulari*. Milano, 1906.
KRAZER: *Lehrbuch der Thetafunktionen*. Leipzig, 1903.
KLEIN: *Über die hypergeometrische Funktion*. — Leipzig, 1906.
NIELSEN: *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*. Leipzig, 1904.
SCHAFHEITLIN: *Theorie der Besselschen Funktionen*.— Leipzig, 1908.



ré acerca de la variación del valor absoluto de la función, comparada con sus coeficientes y con la función exponencial, que es el tipo más sencillo de las funciones enteras. Y no dejaríamos de citar los trabajos de Hadamard, que completan los de Poincaré, estudiando los máximos y mínimos de la función en circunferencias sucesivas.

De mil otras cuestiones habría que tratar, y así llegaríamos a cuestiones no resueltas, como son las relativas a la variación de $f(z)$, respecto de la variación de z. Por ejemplo: fijada una circunferencia de radio r, en ella alcanza la función un máximo M. ¿Cómo varía M al variar r? (1).

Funciones de varias variables.

Para terminar, digamos algo de una generalización que, desde fecha lejana, se ha presentado a los matemáticos de modo natural, y no ha llegado, sin embargo, a constituir un cuerpo armónico de doctrina hasta estos últimos años. Nos referimos a las funciones de varias variables complejas. Prescindamos del caso especial de las funciones algebraicas de dos variables, bien estudiado por Picard y Simart, en su conocida obra; trátase ahora de las funciones analíticas cuales-

(1) Esta teoría de las funciones enteras puede estudiarse en

Borel: *Leçons sur les fonctions entières.*—Paris, 1900.

Blumenthal: *Grundlage der Theorie der ganzen Funktionen unendlicher Ordnung.*—(En prensa.)



quiera; y entonces surgen dificultades numerosas, a veces insuperables.

La variación de un número complejo la seguimos bien en un plano; para la variación de *un par* de números complejos necesitamos acudir al espacio de cuatro dimensiones, y la intuición geométrica que de modo eficaz facilita la investigación, deja de sernos útil. En vez de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, fundamental en la teoría de Riemann, se nos presentan ahora nada menos que cuatro ecuaciones no derivadas parciales. El problema central de Riemann sobre la representación conforme no tiene análogo que pueda servir de núcleo a la teoría.

Mucho se ha logrado, sin embargo, en estos últimos años. Ya se ha estudiado la función lineo-lineal de dos variables, se han dado representaciones geométricas que facilitan el estudio de varias variables independientes, y se han sentado ya varias piedras fundamentales (por ejemplo, la generalización de la integral de Cauchy), gracias, sobre todo, a los trabajos de Forsyth y Poincaré [1]. Finalmente, se ha avanzado bastante en el campo de las funciones cuádruplemente periódicas [2].

Pero al llegar al problema de la uniformación, todos los recursos puestos en juego por Koebe y

(1) El estado actual de la teoría puede estudiarse en Forsyth: *Theory of fonctions of two complex variables.*—Cambridge, 1914.

(2) Véase su libro: Baker, *An Introduction to the theory of multiply-periodic functions.*—Cambridge, 1913.



Poincaré para el caso de una sola variable, dejan de servirnos; por hoy no es posible vislumbrar ni siquiera la existencia de una solución.

Recordad la excursión que hacíamos en la conferencia anterior por el campo de las funciones reales, y pensad en que después de las funciones de varias variables complejas habrá que estudiar las de infinitas variables, y que este infinito podrá ser numerable o continuo, y que habrá que emprender, por tanto, el estudio de entes análogos a las funciones de línea de Volterra, y que éstas habrá que generalizarlas en mil y mil direcciones diversas. Y ahora decidme si los espíritus pobres que, para disimular su cortedad, dicen que *en la Matemática está todo hecho*, no tienen campo inmenso en que demostrar sus aptitudes.



CONFERENCIA SEXTA

Sistematización de la Matemática por medio de la Teoría de grupos

Nos ocupamos hoy de la teoría de grupos, terminando así el programa que nos habíamos propuesto, encerrado en estas tres palabras: *Conjuntos, funciones* y *grupos*.

Concepto de grupo.

Todos sabéis que en la Matemática se opera, no sólo con números, sino también con otros entes abstractos, como son, por ejemplo, las sustituciones entre n objetos, las operaciones funcionales, las transformaciones analíticas o geométricas, etc., y no será preciso recordar que se llama *producto* de dos transformaciones a la que resulta de efectuar estas dos sucesivamente.



Considerad un conjunto de transformaciones; si al multiplicar éstas entre sí resulta siempre una transformación del conjunto dado; si además figura en éste la transformación idéntica o unidad, y si además de esto cada una del conjunto tiene en el mismo su inversa, entonces se dice que el conjunto dado de transformaciones es un *grupo*.

El matemático a quien corresponde el honor de haber adivinado el gran poder clasificador de los grupos, y haber iniciado un método de organización de Álgebra, que ha servido de modelo para sistematizar después otras ramas de la ciencia, es Galois, el malogrado genio de cuya labor creadora habremos de ocuparnos.

No entraremos en la teoría de los grupos abstractos, ciencia nacida como una síntesis final de una brillante serie de aplicaciones del concepto *grupo* a las más variadas teorías matemáticas (1).

Imposible es llegar, en una sola conferencia, hasta detallar los problemas particulares que en todas estas aplicaciones se presentan. Más bien vamos a ocuparnos hoy de la sistematización lograda en Algebra, en Análisis y en Geometría, por esta idea de grupo.

(1) Pueden estudiarse los grupos abstractos en

SÉGUIER: *Éléments de la Théorie de groupes abstraits*. Paris, 1904.

NETTO: *Gruppen-und Substitutionentheorie*. — Leipzig, 1908.



Grupos de sustituciones.

No se crea que el concepto de *grupo* se ha presentado en la Matemática con toda la amplísima generalidad de la definición anterior. Las teorías generales, como son la de conjuntos, la de funciones o correspondencias, y la de grupos, se organizan para sistematizar una serie de teorías menos amplias, y éstas, a su vez, nacen del estudio de un problema concreto.

La *Teoría general de grupos* tiene su origen en los grupos de sustituciones entre *n* objetos, cuyo estudio data de comienzos del siglo XIX.

Cauchy puede considerarse como su fundador, y el problema concreto a que se aplica es de la resolución de ecuaciones. Pero el primer matemático que mostró el enlace íntimo entre la Teoría de grupos y la Teoría de de ecuaciones algebraicas, fué Galois [1].

Es demasiado conocida su vida para que sea necesario referirla. Galois y Abel son los dos ejemplos más notables de precocidad que registra la historia de la Ciencia.

De un matemático que muere a los veintiún años, y deja su nombre unido a una teoría complejísima que ha transformado el Algebra y servido

(1) La obra inédita de Galois no fué conocida hasta que la publicó Liouville en 1846. (Galois murió en 30 de mayo de 1832.)



de modelo a la obra de Lie para las ecuaciones diferenciales, bien podía esperarse que hubiera efectuado una revolución radical en la Matemática, de haber vivido una vida normal.

Galois no desarrolló su teoría. De ella no dejó sino muy compendioso manuscrito, redactado, en gran parte, la víspera del desafío que le costó la vida, y no es posible exigir gran precisión de lenguaje en una obra redactada en tan excepcionales condiciones.

Hermite, Serret, Bertrand, han continuado la teoría de Galois; pero su verdadero organizador es Jordan. El ha introducido las nociones de composición, de isomorfismo y de clase en los grupos, y ha sistematizado la Teoría completa en su fundamental tratado, todavía vigente.

Grupo de una ecuación.

Consideremos una ecuación de raíces desiguales, y para mayor sencillez, con coeficientes numéricos.

Formemos, por un lado, el campo de racionalidad de sus coeficientes; es decir, el conjunto de todos los números que se deducen de ellos por las cuatro operaciones racionales; por otra parte, el campo de racionalidad de las raíces.

El problema de Galois es el siguiente: Hallar este campo conocido el primero, o sea calcular varios números de este campo por medio de ecuaciones auxiliares más sencillas, de los cuales puedan deducirse las raíces buscadas, como combinaciones racionales de ellos.



Muchos de los elementos del segundo campo de racionalidad están contenidos en el primero; por ejemplo, todas las combinaciones racionales simétricas de las raíces se pueden expresar por medio de operaciones racionales con los coeficientes, y, por tanto, pertenecen al primer campo de racionalidad.

Ahora bien: ¿qué son las funciones simétricas de las raíces? Son funciones racionales de ellas que tienen la propiedad de no alterarse al permutar éstas de cualquier modo; es decir, al aplicar a las n raíces cualquiera de las $n!$ sustituciones posibles entre n objetos. Dicho en términos más breves: las funciones simétricas son *invariantes* respecto del grupo *simétrico*.

Pues bien, consideremos ahora un caso más general, a saber: que no sólo las funciones simétricas de las raíces pertenezcan al primer campo, sino un conjunto más amplio de funciones racionales; esto es, que ciertas funciones simétricas y no simétricas de las raíces sean expresables, racionalmente, por medio de los coeficientes. El grupo de sustituciones que dejan invariantes a estas funciones de las raíces será entonces menos amplio que el grupo simétrico, y se llama *grupo de Galois* de la ecuación.

Resolución algebraica de ecuaciones.

Dada una ecuación cualquiera, en general, el grupo de Galois de ella es el simétrico; es decir, sólo las funciones simétricas de las raíces se pueden expresar por medio de combinaciones racionales de los coeficientes.



Pero ampliemos el campo de racionalidad de los coeficientes mediante la *adjunción* de nuevos números; por ejemplo, la raíces de una ecuación auxiliar. Entonces el grupo de la ecuación se reduce. Pues bien: la idea fundamental en Teoría de Galois consiste en elegir la ecuación auxiliar de tal modo que, al ampliarse más y más el campo de racionalidad de los coeficientes, el grupo de Galois se vaya reduciendo, hasta que llegue a constar solamente de la sustitución idéntica.

¿Cuáles son las funciones que son invariantes respecto de esta sustitución? *Todas*. ¿Qué habremos logrado entonces? Que todas las funciones racionales de las raíces (y en particular las raíces mismas) se puedan expresar como funciones racionales del campo así ampliado. El campo de racionalidad de las raíces coincide con el campo de racionalidad de los coeficientes, o está contenido en él, y la ecuación ha quedado resuelta [1].

¿Quiere esto decir que llegaremos a una fórmula cómoda que nos dé los valores de la raíces? No, en modo alguno. El método de Galois no es procedimiento de cálculo práctico; es un sistema de clasificación teórica. Como él mismo dice: «La belleza y la dificultad de la teoría estriba, precisamente, en que sabemos indicar los cálculos y prever los resultados, sin que podamos efectuarlos.»

(1) Para el estudio de la teoría moderna de ecuaciones algebraicas, citaremos solamente el tratado magistral: WEBER, *Lehrbuch der Algebra*.—3 tomos; 2.ª edición.—Leipzig, 1898-1908.



Ecuaciones resolubles por radicales. En la Teoría de Galois están contenidos, como casos particularísimos, todos los métodos anteriores para resolver ecuaciones de tipos especiales.

Antes de Abel, durante todo el siglo XVIII, se ocuparon los matemáticos con este problema: resolver las ecuaciones algebraicas por medio de radicales. Abel cerró estas tentativas, demostrando que ya en las de 5.º grado hay ecuaciones no resolubles por radicales. Esto no obsta, naturalmente, para que muchas ecuaciones numéricas de grado superior sean resolubles con este algoritmo.

Coloquémonos ahora en el punto de vista superior de Galois, y preguntemos: ¿Cuáles son las ecuaciones resolubles por radicales? De otro modo: dada una ecuación, ¿podremos decir si cumple o no esta condición?

Esta pregunta equivale a esta otra: ¿Es posible ampliar el campo de racionalidad de los coeficientes mediante la adjunción de las raíces reales de ecuaciones del tipo $x^n = a$, de modo que el grupo de Galois se reduzca a la sustitución idéntica?

Formemos el grupo de Galois de la ecuación dada y hallemos la serie de sus subgrupos invariantes. La condición necesaria y suficiente para que la ecuación sea resoluble por radicales, es que los índices de estos grupos sean *números primos*.



Grupos continuos. Los creadores de la Teoría moderna de grupos, sistematizando con ella toda la Matemática, son Klein y Sophus Lie. Fué en el período 1870-1880 cuando ambos jóvenes matemáticos elevaron la Universidad de Leipzig a un grado de esplendor nunca después superado.

Pero las investigaciones de Klein se refieren más bien a los grupos discontinuos, y las de Lie exclusivamente a los grupos continuos.

Consideremos un sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= f_1 \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
x'_2 &= f_2 \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x'_n &= f_n \, (x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

de las cuales se pueden despejar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en función de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Este paso de las $x_1, \ldots, x_n$ a sus correspondientes $x'_1, \ldots, x'_n$ es una *sustitución*, o una *transformación*, o una *correspondencia;* la cual será *continua* si lo son todas estas funciones.

Efectuar un *producto* de dos transformaciones, es aplicar éstas sucesivamente; y un conjunto de transformaciones se llama *grupo,* cuando el producto de dos cualesquiera de ellas figura en el mismo conjunto, con las condiciones suplementarias que antes señalábamos.

Ecuaciones diferenciales.

Lie hizo tres series de aplicaciones de la Teoría de grupos continuos: a las *Ecuaciones diferenciales*, a la Teoría de *invariantes*, y a *la Geometría*.

Antes se consideraban ecuaciones diferenciales *integrables* y ecuaciones *no integrables*. Había multitud de métodos, que figuran en los libros clásicos, para obtener en forma explícita la integral general o reducirla a cuadraturas. Cada idea feliz daba origen a un nuevo método.

Pero se observa un hecho notable. Las ecuaciones diferenciales que se integran por estos procedimientos, tienen la propiedad de ser *invariantes* respecto de un cierto sistema de transformaciones; sistema que, claro es, forma *un grupo*. Más aún: los antiguos métodos de integración utilizaban implícitamente esta propiedad, sin darse cuenta de ella.

Lo mismo sucede con las ecuaciones en derivadas parciales. Los métodos de Lagrange, de Pfaff, de Cauchy y Jacobi para las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, no consisten en otra cosa sino en transformarlas en otras más sencillas.

Parece, pues, natural prescindir de los infinitos artificios más o menos ingeniosos a que se reducen aquellos métodos, y colocarse con Sophus Lie en un punto de vista superior, planteando el siguiente problema:

Hallar el grupo de transformaciones que dejan invariante una ecuación diferencial, y utilizar éste para integrarla.



Teoría de los invariantes diferenciales.

Suele llamarse *Teoría de invariantes* o *Teoría de formas* al estudio de los *invariantes* algebraicos, esto es, de ciertas combinaciones racionales de los coeficientes de un polinomio, que no alteran o quedan multiplicadas por una constante al efectuar en este polinomio una sustitución lineal.

Los fundadores de esta Teoría son Cayley, Jacobi, Hesse,... Pero la palabra *invariante* tiene un significado más amplio. En primer lugar, las funciones pueden no ser algebraicas: pueden contener, además, las derivadas; y se obtienen así los invariantes *diferenciales*. En segundo lugar, las sustituciones a que se somete la función pueden no ser lineales.

La Teoría de la curvatura de Euler-Monge no es otra cosa que el estudio de un *invariante diferencial* respecto del grupo de los movimientos.

La Teoría de la deformación de superficies de Gauss, es el estudio de otro invariante.

La Teoría de la curvatura de Riemann en el espacio de *n* dimensiones, no es sino el estudio de otro invariante diferencial respecto del grupo de los movimientos en E_n.

Análogamente sucede con la Teoría de las transformaciones de contacto de Lie, las de Laguerre y Halphen.

Todas estas Teorías quedan incluídas en la de Lie, y estos invariantes son casos particulares de los invariantes diferenciales de Lie *respecto de un grupo continuo cualquiera*.



Problema de Hilbert.

En toda su Teoría supone Lie que las funciones que definen las transformaciones son derivables.

Hilbert ha planteado la siguiente cuestión: *¿Subsiste la Teoría de Lie, o qué modificaciones debe sufrir, si se prescinde de la hipótesis de que las funciones sean derivables?* (1).

La condición de que varias transformaciones formen un grupo, está expresada por una ecuación funcional. El método constantemente seguido por Lie, consiste en transformarla por diferenciaciones en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales; si prescindimos de la condición de que sean derivables, su Teoría deja de ser aplicable.

Esta restricción es de un gran valor. Hemos dicho, en efecto, que Lie utiliza su Teoría para establecer un sistema de axiomas para la Geometría. Pero esta condición de la existencia de la diferencial, no es posible establecerla en los fundamentos sino de un modo largo y enojoso, no adecuado a su objeto.

Hilbert se pregunta: ¿No será posible transformar un grupo cualquiera en otro accesible al método de Lie?

(1) *Mathematische Probleme.*—Gött. Nach., 1900.
BROUWER: *Die Theorie der endlichen continuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie.*—Congreso de Roma, 1908.

Definición de la Geometría.

La Geometría intuitiva abstrae multitud de sensaciones (color, peso...), substituyendo a los cuerpos por entes ideales, llamados *figuras geométricas*, cuyas propiedades estudia. Pero ¿cuáles son estas propiedades que constituyen el objeto de la Geometría? No las relaciones con el mundo externo, sino las que no varían en el movimiento de la figura; es decir, las propiedades *inherentes* a ésta. Dicho en lenguaje matemático: *las propiedades invariantes respecto del grupo de los movimientos.*

Cuando decimos que el teorema de Pitágoras es una propiedad del triángulo rectángulo, no nos referimos a un triángulo rectángulo determinado, sino a uno arbitrario, cualquiera que sea su magnitud y su posición. Es decir, son las propiedades independientes de la *posición absoluta* de las figuras respecto de la Tierra, las que estudia la Geometría, y no sólo independientes de la *posición*, sino también de la *magnitud* y del *sentido*.

Obtenemos así la siguiente definición de Klein: *La Geometría estudia las propiedades invariantes de las figuras respecto del grupo formado por todos los movimientos, más todas las semejanzas, más todas las simetrías.*

Este grupo se llama *fundamental* de la Geometría.

Pero ya en conferencias anteriores hemos ex-



puesto la evolución de la Geometría. Nacida de la observación de la Naturaleza, prescinde de la intuición, para constituirse como ciencia exacta, y así llegamos a la noción de espacio abstracto. Pues bien: siendo puramente abstractos los entes con que la Geometría opera, claro es que podemos ampliar indefinidamente este espacio abstracto, atribuyéndole cualquier número de dimensiones, y el grupo fundamental puede sustituirse igualmente por cualquier otro.

Llegamos así a la siguiente definición más general dada por Klein:

Dado un conjunto de cualquier número de dimensiones, y un grupo de transformaciones entre sus elementos, se llama Geometría al estudio de las propiedades de aquel conjunto que son invariantes respecto de las transformaciones de este grupo.

Geometrías métrica y proyectiva.

Aceptada esta concepción tan amplia de la Geometría, resulta que en cada espacio hay tantas ramas geométricas o tantas Geometrías como grupos de transformaciones puedan definirse entre sus elementos.

Analicemos, por vía de ejemplo, la mutua dependencia entre las dos Geometrías más conocidas, por su carácter elemental: la *Geometría métrica, euclidiana* y la *Geometría proyectiva*.

La Métrica nace del estudio de las propiedades que apreciamos por el sentido del tacto; la Geo-

**



metría proyectiva nace de la percepción visual del espacio físico.

En la Geometría métrica dos segmentos son equivalentes cuando se pueden superponer; para la Geometría proyectiva todos los segmentos y, más general, dos figuras cualesquiera que se deducen una de otra por secciones y proyecciones, son equivalentes. En la Geometría métrica, los triángulos rectángulos tienen propiedades especiales; la elipse, la hipérbola y la parábola tienen propiedades distintas; la circunferencia es una elipse especial. En la Geometría proyectiva todos los triángulos son equivalentes y todas las cónicas lo son también.

En una palabra: la Métrica estudia las propiedades que son invariantes respecto del *grupo fundamental,* mas dejan de subsistir en cualquier otra transformación; la Geometría proyectiva estudia todas las propiedades que no alteran por una colineación cualquiera, pero sí por una transformación no proyectiva.

Método proyectivo y método métrico.

Todos sabéis que la Métrica está incluída en la Geometría proyectiva como caso particular. Toda propiedad métrica de una figura es una propiedad proyectiva de esta figura respecto de la involución rectangular del infinito; o dicho más brevemente: de los elementos imaginarios *circulares* del espacio.

Un ejemplo; el teorema de Métrica: *Las alturas*



de un triángulo concurren en un punto, es un caso particular de este otro proyectivo: «Los tres pares de lados opuestos de un cuadri-vértice, son cortados por toda secante en tres pares de una involución.»

De aquí nacen dos métodos para estudiar la Geometría métrica:

1.° Estudiar la Geometría proyectiva respecto de la figura fija formada por los puntos circulares, o por la curva circular del infinito. Este es el *método proyectivo*.

2.° Estudiar solamente aquellas propiedades proyectivas que quedan invariantes, no para todas las colineaciones, sino sólo para las que dejan fija esta figura del infinito; es decir: los *movimientos*, *semejanzas* y *simetrías*. Este es el *método métrico*.

Principio de Klein. Este hecho que acabamos de señalar es muy antiguo, y Klein ha sido el primero en notar su extraordinario alcance. En su famoso *programa de Erlangen* (1), origen de la Geometría moderna, establece el siguiente principio clasificador de la Geometría:

Sea G un grupo cualquiera y consideremos la Geometría fundada en él; es decir, la rama que estudia las propiedades invariantes respecto de este grupo.

(1) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.*—Erlangen, 1872; 48 págs.



Sustituyamos este grupo G por otro G′ más amplio, que lo comprenda como subgrupo. Las propiedades que eran invariantes respecto de G, aparecen ahora divididas en dos clases: unas son también invariantes respecto de las nuevas transformaciones de G′, y, por tanto, corresponden en realidad a la Geometría de este grupo G′; otras, en cambio, dejan de subsistir respecto de G′; es decir, son privativas del grupo G.

Resulta, pues, que al ampliar el grupo que sirve de fundamento a una Geometría, el campo de las propiedades geométricas se restringe, y nacen así, perfectamente clasificadas, nuevas y nuevas ramas, según el grupo que se adopte como base.

Geometría esférica

Hemos señalado el hecho conocido de que la Geometría proyectiva comprende como caso particular a la Métrica. Hubo una época, en el segundo tercio del siglo XIX, en que llegó a declararse la rama proyectiva como la Geometría por excelencia. «Los matemáticos de entonces—dice Klein—se acostumbraron de tal modo al punto de vista proyectivo, que éste se consideraba como el único científico. Toda demostración elemental, todo razonamiento de índole métrica, se consideraba satisfactorio, solamente si en él intervenían los puntos circulares, el círculo del infinito, la razón doble, o cosas parecidas.»

Puede caracterizarse aquella época, en la que todavía vivimos en España, por la frase de Cay-



ley: *La Geometría proyectiva es toda la Geometría.*

La voz de Klein fué la primera que se alzó para protestar de tal exclusivismo. «Al lado de la Geometría proyectiva—proclama repetidamente—existen varias otras con igual derecho de existencia. De ningún modo debe presentarse siempre el círculo como caso particular de las cónicas, pues tienen círculo y esfera sobrado interés respecto de las demás cónicas y cuádricas. Igualmente absurdo sería pretender edificar con método proyectivo la teoría de las transformaciones por radios recíprocos.»

Una de las Geometrías a que aludía Klein es la Geometría *conforme*. De igual modo que la rama proyectiva nace ampliando el grupo fundamental con todas las proyecciones y secciones, nace la Geometría conforme agregando al grupo fundamental todas las transformaciones por radios rectores recíprocos.

El infinito en esta Geometría desempeña el papel de un punto; los planos y las esferas son equivalentes, y, en cambio, la *esfera* y el *elipsoide* tienen propiedades esencialmente distintas. Son elementos *invariantes* en esta Geometría las razones dobles y los ángulos; sus coordenadas naturales son las *tetracíclicas* y las *pentaesféricas.*

Pero el grupo de esta Geometria *conforme* puede ampliarse más y más, llegando a la Geometría *esférica* de Lie. En ella son equivalentes los *planos* y las *esferas* y los *puntos;* son elementos invariantes las *escamas;* forman cuerpo las *esferas,* los *planos* y los *puntos.*

Geometría proyectiva superior.

La frase de Cayley antes citada ha perdido, pues, su valor; después de la concepción de Lie no puede ya aplicarse.

Ahora bien: ¿no será quizás la Geometría proyectiva elemental susceptible de tal ampliación que alcance, y aun sobrepuje, el grado de generalidad de la Geometría de Lie? Desde luego, la restricción de que el grupo que le sirve de base sea puntual, desaparece, ampliándolo con las correlaciones; asimismo puede ampliarse mediante el imaginarismo. Pero como alcanza su grado máximo de generalidad es ampliando el número de dimensiones del espacio proyectivo.

Definimos, pues, la Geometría proyectiva superior como *la Ciencia que estudia las propiedades invariantes del espacio de* n *dimensiones, respecto del grupo proyectivo y de cada uno de sus subgrupos.*

Este plan es el que hemos desarrollado en la obra que la Academia tuvo la benevolencia de premiar, y a ella remitimos a quien desee estudiar esta disciplina [1].

Sólo haremos dos observaciones: 1.ª Concebida de este modo tan amplio la Geometría proyectiva superior, la mayor parte de su campo está por explorar. 2.ª Esta disciplina abarca y comprende, no sólo a la *Geometría métrica y esférica de Lie,* sino a todas las Geometrías actualmente bien estudiadas.

(1) Como en dicha obra damos copiosa bibliografía, no es necesario reproducirla aquí.



Geometrías trascendentes

El grupo de la Geometría elemental puede ampliarse de nuevo. Las transformaciones proyectivas son birracionales; es decir, las coordenadas de cada punto son funciones racionales de las de su homólogo. Ahora bien: ¿existen funciones birracionales distintas de las lineales?

Para n = 1, la contestación que da la Teoría de funciones es negativa. Toda correspondencia analítica que es biunívoca es una proyectividad. Para n = 2, no sucede lo propio; el caso de la transformación cuadrática es bien conocido desde principios del siglo XIX. Finalmente, Cremona dió la solución general, presentando una teoría completa de estas transformaciones birracionales, que desde entonces se llaman *cremonianas*.

¿Pero existe una teoría de los invariantes de las transformaciones cremonianas, es decir, una Geometría fundada en el grupo cremoniano? Todavía no. El resultado más importante logrado hasta ahora es el teorema de Clifford-Nöther-Rosanes.

Todavía más amplio que el grupo cremoniano es el de las *transformaciones puntuales algebraicas,* propuesto por Riemann, y todavía no estudiado, si se exceptúan los trabajos de Nöether sobre las curvas algebraicas. Otra laguna en el campo geométrico.

Más general: el grupo de todas las *transformaciones puntuales conformes*. Tampoco estudiadas apenas.

Más general todavía: el grupo de todas las *deformaciones*. Cada curva se transforma en otra de



igual número de ramas y puntos múltiples. Tenemos un invariante: *la curva de Jordan;* otro invariante: *la dimensión;* otro: el orden de *conexión*. La Geometría de este grupo es la *Topología* o *Análisis Situs*.

Más amplio aún es el grupo de todas las *transformaciones puntuales*. Todas las curvas y todas las superficies son en este sistema equivalentes. La dimensión deja, pues, de ser un invariante.

En todas estas transformaciones, ya sea elemento fundamental el punto, el plano, la esfera, hemos observado un carácter común: a dos figuras tangentes corresponden dos figuras tangentes. Por ejemplo, fijémonos en el grupo proyectivo.

De aquí nace la idea de considerar todas las transformaciones del espacio que sólo cumplen esta condición: transformar figuras tangentes en figuras tangentes. Estas son las *transformaciones de contacto*. En el grupo que forman están contenidos como subgrupos *todos los anteriores*.

Así como el elemento fundamental en las Geometrías anteriores es el punto, es decir un conjunto de tres coordenadas, aquí el elemento fundamental es un conjunto de cinco números:

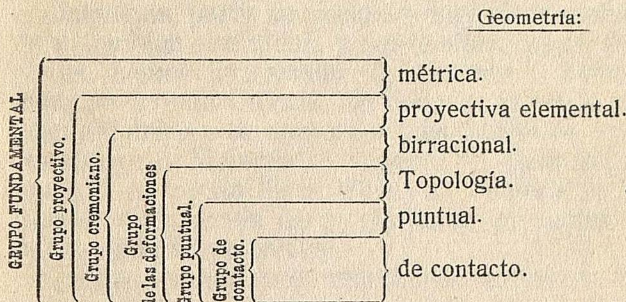
$$(x, y, z, p, q) \quad \text{siendo:} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

En lenguaje geométrico, tal elemento está formado por un punto y un entorno infinitesimal del plano que lo contiene, o sea: una *escama* (Schuppe). Toda figura geométrica es un lugar geométrico de *escamas*.

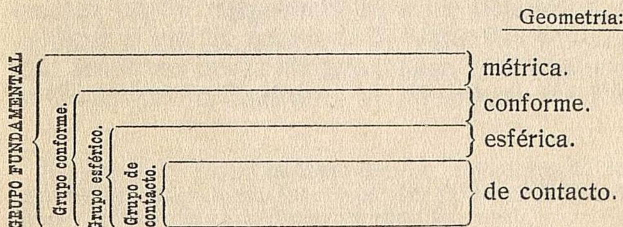


Puntos, curvas y superficies desarrollables o no, son equivalentes en esta Geometría, y se transforman unos en otros. Cada figura está definida por una *ecuación diferencial*, y toda propiedad está expresada por un *invariante diferencial.*

Conexiones entre las diversas Geometrías. He aquí, en resumen, el esquema de todo el edificio geométrico: En primer lugar, tenemos este escalonamiento:

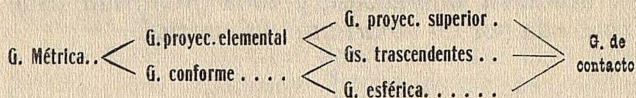


En segundo término, otra escala de relaciones:





y la conexión entre ambas queda evidenciada con el esquema siguiente, que sistematiza la Ciencia geométrica:





Terminamos aquí la sistematización de las teorías que constituyen la Matemática actual. En todas ellas hemos procurado, en el curso de estas conferencias, partir de nociones muy elementales, de todos bien conocidas, y desde ellas, a grandes pasos, hemos atravesado rápidamente el campo inmenso de esta Ciencia, sin detenernos en la región armónica y de contornos bien limitados, que constituye la Matemática vigente [1], para llegar hasta la imprecisa línea divisoria, frontera de lo desconocido, donde las paradojas se presentan y la discusión es ya posible.

Quedan, ciertamente, infinidad de teorías que no hemos citado; la simple enunciación de sus nombres, hubiera sido fácil pero insufrible alarde pedantesco. El oyente o lector en quien estas conferencias hayan despertado la sana curiosidad de conocer el mundo nuevo de la Matemática moderna, acuda en busca de orientación bibliográfica a la *Enciclopedia Teubner* o al *Repertorio* de Pas-

(1) De la extensión inmensa de sus teorías puede formarse idea consultando las obras del profesor Galdeano, únicas fuentes de consulta en lengua castellana.



cal. Nuestro propósito era más modesto; nos basta haber conseguido que todas estas ramas queden incluídas en la clasificación amplísima en que hemos sistematizado las teorías capitales, agrupándolas en torno de estas tres ideas: *Conjuntos, Funciones* y *Grupos*.



SUMARIO













Precio: 3,50 pesetas.

